Logique et calculabilité - PC 9

Exercice 1

On associe un type à chaque terme du lambda-calcul. Les types sont les expressions closes d'un langage formé d'un ensemble infini de constantes $\rho_0, \rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ et d'un symbole binaire $\rightarrow$. Un *contexte de typage* est un ensemble fini de déclarations de la forme $x : \alpha$ où x est une variable et α un type. Un jugement de typage est un triplet formé d'un contexte de typage Γ, d'un terme t et d'un type α. Le jugement $\Gamma \vdash t : \alpha$ exprime que le terme t a le type α dans le contexte Γ, par exemple le terme *fun* $x \rightarrow (f\ x\ x)$ a le type $\rho_0 \rightarrow \rho_0$ dans le contexte $\{f : \rho_0 \rightarrow \rho_0 \rightarrow \rho_0\}$. Les jugements *dérivable* sont inductivement définis par les règles suivantes

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \alpha} \text{ Si } x : \alpha \text{ est un élément de } \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma \vdash u : \alpha}{\Gamma \vdash (t\ u) : \beta}$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash t : \beta}{\Gamma \vdash (\mathit{fun}\ x \rightarrow t) : \alpha \rightarrow \beta}$$

1. Donner un terme de type $\rho_0 \rightarrow \rho_1 \rightarrow \rho_0$ dans le contexte vide. Et un terme de type $\rho_0 \rightarrow \rho_1 \rightarrow \rho_1$.

La logique propositionnelle minimale est le fragment de la logique des prédicats formé des symboles de proposition $P_0, ..., P_n$ et l'implication.

2. Quelles sont les règles que l'on peut utiliser pour démontrer une proposition dans ce fragment ? Donner une démonstration de la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_0$. Et de la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_1$.

On considère une application ϕ qui associe un type du lambda-calcul à chaque proposition de la logique propositionnelle minimale.

$$\phi P_i = \rho_i$$

$$\phi(A \Rightarrow B) = (\phi A) \rightarrow (\phi B)$$

3. Quelle est le type associé à la proposition $P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_0$?

4. Montrer qu'il existe une démonstration π du séquent $A_1, ..., A_p \vdash B$ si et seulement si il existe un terme t de type ϕB dans le contexte $x_1 : \phi A_1, ..., x_p : \phi A_p$.

5. Soit Γ le contexte $\quad A, \quad A \Rightarrow B, \quad B \Rightarrow C, \quad C \Rightarrow D$. Quel est le terme

associé à la démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\ B \vdash\ C \Rightarrow D} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma,\ B \vdash\ B \Rightarrow C} \quad \dfrac{}{\Gamma,\ B \vdash\ B}}{\Gamma,\ B \vdash\ C}}{\Gamma,\ B \vdash\ D}}{\Gamma \vdash\ B \Rightarrow D} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash\ A \Rightarrow B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash\ A}}{\Gamma \vdash\ B}}{\Gamma \vdash\ D}$$

? Ce terme termine-t-il ? Quelle est sa forme irréductible ? Quelle est la démonstration associée à cette forme irréductible ?

6. Quelle est la forme des démonstrations qui se traduisent sur un radical ? Quelle est la démonstration associée au terme obtenu en réduisant ce radical ?

Exercice 2

1. Soit A une proposition quelconque, donner une démonstration (non nécessairement constructive) dans le calcul des séquents de la proposition

$$A \vee \neg A$$

Donner une démonstration constructive de la proposition

$$\neg\neg(A \vee \neg A)$$

On associe à chaque proposition A de la logique des prédicats une proposition $|A|$ définie par récurrence sur la structure de A de la manière suivante

- $|P| = \neg\neg P$
- $|\top| = \neg\neg\top$
- $|\bot| = \neg\neg\bot$
- $|A \wedge B| = \neg\neg(|A| \wedge |B|)$
- $|A \vee B| = \neg\neg(|A| \vee |B|)$
- $|A \Rightarrow B| = \neg\neg(|A| \Rightarrow |B|)$
- $|\neg A| = \neg\neg\neg|A|$
- $|\forall x\ A| = \neg\neg\forall x\ |A|$
- $|\exists x\ A| = \neg\neg\exists x\ |A|$

2. Quelle est la proposition $|\exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))|$?

3. On associe à chaque proposition A de la logique des prédicats une proposition $||A||$ similaire à $|A|$ sauf que l'on enlève une négation à la racine

- $||P|| = \neg P$

- $||\top|| = \neg\top$
- $||\bot|| = \neg\bot$
- $||A \wedge B|| = \neg(|A| \wedge |B|)$
- $||A \vee B|| = \neg(|A| \vee |B|)$
- $||A \Rightarrow B|| = \neg(|A| \Rightarrow |B|)$
- $||\neg A|| = \neg\neg|A|$
- $||\forall x\ A|| = \neg\forall x\ |A|$
- $||\exists x\ A|| = \neg\exists x\ |A|$

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ a une démonstration dans le calcul des séquents sans coupures (non nécessairement constructive) alors le séquent $|\Gamma|||\Delta|| \vdash$ a une démonstration sans coupures et constructive.

4. Montrer que si la proposition A a une démonstration (non nécessairement constructive) alors la proposition $|A|$ a une démonstration constructive.

5. Montrer que la proposition $A \Leftrightarrow |A|$ a une démonstration (non nécessairement constructive). Montrer que si la proposition $|A|$ a une démonstration constructive alors la proposition A a une démonstration (non nécessairement constructive).

6. Donner une démonstration constructive du séquent $|P(0)|, |\neg P(2)| \vdash |\exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))|$.

7. Donner une démonstration constructive du séquent $P(0), \neg P(2) \vdash \neg\neg\exists x\ (P(x) \wedge \neg P(S(x)))$.