Logique et calculabilité - PC 8

Exercice 1

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A'$ est démontrable alors les séquents $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A' \wedge B)$, $\Gamma \vdash (B \wedge A) \Leftrightarrow (B \wedge A')$, $\Gamma \vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$, $\Gamma \vdash (B \vee A) \Leftrightarrow (B \vee A')$, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \Rightarrow B)$, $\Gamma \vdash (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A')$, $\Gamma \vdash (\neg A) \Leftrightarrow (\neg A')$, $\Gamma \vdash (\forall x\ A) \Leftrightarrow (\forall x\ A')$ et $\Gamma \vdash (\exists x\ A) \Leftrightarrow (\exists x\ A')$ sont démontrables.

Exercice 2

1. Montrer que si le séquent $\vdash A \Leftrightarrow A'$ est démontrable alors le séquent $\Gamma, A \vdash \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma, A' \vdash \Delta$ est démontrable et le séquent $\Gamma \vdash A, \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma \vdash A', \Delta$ est démontrable.

2. Montrer que, si x n'est pas une variable libre de B, les propositions $((\forall x\ A) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x\ (A \wedge B)$, $(B \wedge (\forall x\ A)) \Leftrightarrow \forall x\ (B \wedge A)$, $((\exists x\ A) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x\ (A \wedge B)$, $(B \wedge (\exists x\ A)) \Leftrightarrow \exists x\ (B \wedge A)$, $((\forall x\ A) \vee B) \Leftrightarrow \forall x\ (A \vee B)$, $(B \vee (\forall x\ A)) \Leftrightarrow \forall x\ (B \vee A)$, $((\exists x\ A) \vee B) \Leftrightarrow \exists x\ (A \vee B)$, $(B \vee (\exists x\ A)) \Leftrightarrow \exists x\ (B \vee A)$, $((\forall x\ A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x\ (A \Rightarrow B)$, $(B \Rightarrow (\forall x\ A)) \Leftrightarrow \forall x\ (B \Rightarrow A)$, $((\exists x\ A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x\ (A \Rightarrow B)$, $(B \Rightarrow (\exists x\ A)) \Leftrightarrow \exists x\ (B \Rightarrow A)$, $(\neg(\forall x\ A)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg A$ et $(\neg(\exists x\ A)) \Leftrightarrow \forall x\ \neg A$ sont démontrables.

   Montrer que, pour toute proposition A, il existe une proposition prénexe A' telle que la proposition $A \Leftrightarrow A'$ soit démontrable.

   Montrer que le séquent $\vdash A$ est démontrable si et seulement si le séquent $\vdash A'$ est démontrable.

3. Montrer que la proposition $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ est démontrable. Montrer que le séquent $\vdash A$ est démontrable si et seulement si le séquent $\neg A \vdash$ est démontrable.

   Montrer que, pour toute proposition A, il existe une proposition prénexe A' telle que le séquent $A' \vdash$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\vdash A$ est démontrable.

4. Montrer que, pour toute proposition A, il existe une proposition universelle A' telle que le séquent $A' \vdash$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\vdash A$ est démontrable. Indice : utiliser le théorème de Skolem.

Exercice 3

1. Montrer que les propositions $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$, $(\neg \top) \Leftrightarrow \bot$, $(\neg \bot) \Leftrightarrow \top$, $(\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$, $(\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ et $(\neg\neg A) \Leftrightarrow A$ sont démontrables.

   Montrer que, pour toute proposition sans quantificateurs A, il existe une proposition A' sans quantificateurs, qui ne contient pas le symbole $\Rightarrow$ et dans laquelle la négation n'est appliquée qu'à des propositions atomiques, telle que la proposition $A \Leftrightarrow A'$ soit démontrable.

2. Montrer que les propositions $((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C))$, $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$, $(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, $((A \wedge B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$, $(\top \vee A) \Leftrightarrow \top$, $(A \vee \top) \Leftrightarrow \top$, $(\bot \vee A) \Leftrightarrow A$ et $(A \vee \bot) \Leftrightarrow A$ sont démontables.

   Montrer que, pour toute proposition sans quantificateurs A, il existe une proposition normale conjonctive A', telle que la proposition $A \Leftrightarrow A'$ soit démontrable.

3. Montrer que, pour toute proposition A, il existe une proposition universelle A' de la forme $\forall x_1 ... \forall x_n\ C$ où C est une proposition normale conjonctive telle que le séquent $A' \vdash$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\vdash A$ est démontrable.

   Montrer que la proposition $(\forall x\ (A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\forall x\ A) \wedge (\forall x\ B))$ est démontrable. Monter que le séquent $\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta$ est démontrable si et seulement si le séquent $\Gamma, A, B \vdash \Delta$ est démontrable.

   Montrer que si la proposition C a la forme $D_1 \wedge ... \wedge D_p$, alors le séquent $\vdash A$ est démontrable si et seulement si le séquent $\overline{\forall} D_1, ..., \overline{\forall} D_p \vdash$ est démontrable où la proposition $\overline{\forall} D$ est obtenue en quantifiant universellement toutes les variables libres de D.

Exercice 4 (Le théorème de Herbrand)

Soit A une proposition prénexe close de la forme $\mathcal{Q}_1 x_1 ... \mathcal{Q}_n x_n\ C$. On appelle *instance close* de A, une proposition close de la forme σC où σ est une substitution de domaine $x_1, ..., x_n$.

Soient $A_1, ..., A_n$ des propositions universelles closes et Γ et Δ des multi-ensembles de propositions closes sans quantificateurs. Montrer que si le langage contient au moins une constante, alors le séquent $\Gamma, A_1, ..., A_n \vdash \Delta$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement si il existe des instances closes $A_1^1, ..., A_1^{p_1}$ de A_1, ..., $A_n^1, ..., A_n^{p_n}$ de A_n, telles que le séquent sans quantificateur $\Gamma, A_1^1, ..., A_1^{p_1}, ..., A_n^1, ..., A_n^{p_n} \vdash \Delta$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Soient $A_1, ..., A_n$ des propositions universelles closes. Montrer que si le langage contient au moins une constante, le séquent $A_1, ..., A_n \vdash$ est démontrable dans le calcul des séquents sans coupures si et seulement si il existe des instances closes $A_1^1, ..., A_1^{p_1}$ de A_1, ..., $A_n^1, ..., A_n^{p_n}$ de A_n, telles que le séquent sans quantificateurs $A_1^1, ..., A_1^{p_1}, ..., A_n^1, ..., A_n^{p_n} \vdash$ soit démontrable dans le calcul des séquents sans coupures.

Exercice 5 (La résolution)

Une *clause* est un ensemble fini de propositions, dans lequel chaque proposition est une proposition atomique ou la négation d'une proposition atomique.

Si $C = \{A_1, ..., A_n\}$ est une clause, on écrit $\overline{\forall} C$ la proposition $\forall x_1 \, ... \, \forall x_p \; (A_1 \vee ... \vee A_n)$ où $x_1, ..., x_p$ sont les variables libres de $A_1, ..., A_n$ et $\overline{\forall} \varnothing = \bot$ par convention.

Soit E un ensemble de clauses, on considère l'ensemble de clauses G inductivement défini par les trois règles suivantes

- si C appartient à E, alors C appartient à G,
- C appartient à G, alors $(t/x)C$ appartient à G,
- si $C_1 \cup \{A\}$ et $C_2 \cup \{\neg A\}$ appartiennent à G, alors $C_1 \cup C_2$ appartient à G.

On écrit $E \rightsquigarrow C$ pour exprimer que la clause C appartient à l'ensemble G.

1. Soit E l'ensemble formé des quatre clauses

$$P(a, b)$$

$$P(b, c)$$

$$\neg P(x, y), \neg P(y, z), G(x, z)$$

$$\neg G(a, c)$$

   Donner une dérivation de $E \rightsquigarrow \varnothing$.

2. Montrer que pour toute proposition A, il existe un ensemble de clauses $C_1, ..., C_n$ tel que le séquent $\vdash A$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable. Quel est l'ensemble de clauses associé à la proposition suivante ?

$$(P(a, b) \wedge P(b, c) \wedge \forall x \forall y \forall z \; ((P(x, y) \wedge P(y, z)) \Rightarrow G(x, z))) \Rightarrow G(a, c)$$

3. On veut montrer que si $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable. On montre plus généralement que si $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow D$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Montrer que si $D = (t/x)C$ alors le séquent $\overline{\forall} C \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

   Montrer que si $C_1 = C_1' \cup \{A\}$ et $C_2 = C_2' \cup \{\neg A\}$ et $D = C_1' \cup C_2'$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, \overline{\forall} C_2 \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

Soit $C_1, ..., C_n$ un ensemble de clauses, montrer que si $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow D$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash \overline{\forall} D$ est démontrable.

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash \bot$ est démontrable, alors le séquent $\Gamma \vdash$ l'est aussi.

Montrer que si $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$, alors le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable.

4. On veut maintenant montrer la réciproque, c'est-à-dire que si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable, alors $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soit E un ensemble de clauses et C et D deux clauses. Montrer que si $E \rightsquigarrow C$ et $E \cup \{C\} \rightsquigarrow D$ alors $E \rightsquigarrow D$.

   Soit D est une clause close, $E = \{C_1, ..., C_n\}$ et $E' = \{C'_1, ..., C'_n\}$ deux ensembles de clauses closes, tels que pour tout i, C'_i est ou bien la clause C_i ou bien la clause $C_i \cup D$ et C une clause close. Montrer que si $E \rightsquigarrow C$ alors ou bien $E' \rightsquigarrow C$ ou bien $E' \rightsquigarrow C \cup D$. Montrer que si $E \rightsquigarrow \varnothing$ alors ou bien $E' \rightsquigarrow \varnothing$ ou bien $E' \rightsquigarrow D$. Montrer que si C et C' sont deux clauses closes et $E \cup \{C\} \rightsquigarrow \varnothing$ et $E \cup \{C'\} \rightsquigarrow \varnothing$ alors $E, (C \cup C') \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soient $C_1, ..., C_n$ des clauses closes et $P_1, ..., P_m$ des propositions atomiques closes. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash P_1, ..., P_m$ est démontrable, alors $C_1, ..., C_n, \neg P_1, ..., \neg P_m \rightsquigarrow \varnothing$. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable, alors $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

   Soient $C_1, ..., C_n$ des clauses quelconques. Montrer que si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable alors $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$. Indice : utiliser le théorème de Herbrand.

   Soient $C_1, ..., C_n$ des clauses quelconques. Montrer que le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable si et seulement si $C_1, ..., C_n \rightsquigarrow \varnothing$.

5. Les trois règles ci-dessus ne peuvent pas encore être utilisées comme un algorithme de recherche de démonstrations, car la deuxième demande de choisir un terme dans un ensemble infini. On introduit donc un autre ensemble de règles appelé *règles de résolution*.

   Soit E un ensemble de clauses, on considère l'ensemble de clauses G inductivement défini par les deux règles suivantes

   - si C appartient à E, alors C appartient à G,
   - si $C \cup \{A_1, ..., A_n\}$ et $C' \cup \{\neg B_1, ..., \neg B_m\}$ sont deux clauses de G dans lesquelles on a renommé les variables de manière à ce qu'elles ne partagent pas de variables, et σ est une solution principale du problème d'unification $A_1 = ... = A_n = B_1 = ... = B_m$ alors la clause $\sigma(C \cup C')$ appartient à G.

   On écrit $E \hookrightarrow C$ pour exprimer que C appartient à l'ensemble G.

   Soit E l'ensemble de clause de la question *(1.)* Donner une dérivation de $E \hookrightarrow \varnothing$.

Soit E l'ensemble de clauses. Montrer que si $E \hookrightarrow D$ alors $E \rightsquigarrow D$. Montrer que si $E \hookrightarrow \varnothing$ alors $E \rightsquigarrow \varnothing$.

Montrer que s'il existe un ensemble E' contenant des clauses de la forme σC où C est une clause de E et σ une substitution, tel que $E' \rightsquigarrow D'$ alors il existe une clause D et une substitution τ telle que $E \hookrightarrow D$ et $D' = \tau D$. Montrer que si $E \rightsquigarrow \varnothing$ alors $E \hookrightarrow \varnothing$.

Soit E un ensemble de clauses. Montrer que $E \rightsquigarrow \varnothing$ si et seulement si $E \hookrightarrow \varnothing$.

Soit A une proposition et $C_1, ..., C_n$ un ensemble de clauses tel que le séquent $\vdash A$ soit démontrable si et seulement si le séquent $\overline{\forall} C_1, ..., \overline{\forall} C_n \vdash$ est démontrable. Montrer que le séquent $\vdash A$ est démontrable si et seulement si $C_1, ..., C_n \hookrightarrow \varnothing$.