# Logique et calculabilité - PC6

## Exercice 1

Une relation $R$ définie sur un ensemble $E$ est dite *fortement confluente* si à chaque fois que $t \ R \ u$ et $t \ R \ v$, il existe un élément $w$ tel que ($u \ R \ w$ ou $u = w$) et ($v \ R \ w$ ou $v = w$).

Montrer qu'une relation fortement confluente est confluente.

## Exercice 2

Le but de cet exercice est de montrer un cas particulier du théorème selon lequel un ensemble de règle orthogonal définit une relation $\triangleright$ confluente. Soit le langage formé des constantes $a$ et $b$, du symbole de fonction unaire $f$ et du symbole de fonction binaire $g$. Soit l'ensemble de règles

$$a \longrightarrow b$$

$$f(x) \longrightarrow g(x, x)$$

1. La relation $\triangleright$ pour ce système est inductivement définie par les règles

$$\frac{}{a \triangleright b}$$

$$\frac{}{f(t) \triangleright g(t, t)}$$

$$\frac{t \triangleright t'}{f(t) \triangleright f(t')}$$

$$\frac{t_1 \triangleright t_1'}{g(t_1, t_2) \triangleright g(t_1', t_2)}$$

$$\frac{t_2 \triangleright t_2'}{g(t_1, t_2) \triangleright g(t_1, t_2')}$$

   A-t-on $g(a, a) \triangleright g(b, b)$ ? La relation $\triangleright$ définie par cet ensemble de règle est-elle fortement confluente ?

2. Soit la variante de cette relation, *la réduction parallèle*, inductivement définie par les règles

$$\frac{}{t \triangleright^{\parallel} t}$$

$$\frac{}{a \triangleright^{\parallel} b}$$

$$\overline{f(t) \rhd^{\|} g(t,t)}$$

$$\frac{t \rhd^{\|} t'}{f(t) \rhd^{\|} f(t')}$$

$$\frac{t_1 \rhd^{\|} t'_1 \quad t_2 \rhd^{\|} t'_2}{g(t_1,t_2) \rhd^{\|} g(t'_1,t'_2)}$$

A-t-on $g(a,a) \rhd^{\|} g(b,b)$ ? Montrer que la relation $\rhd^{\|}$ est fortement confluente. Montrer que la relation $\rhd^{\|}$ est confluente.

3. Montrer que si $t \rhd u$ alors $t \rhd^{\|} u$. Montrer que si $t \rhd^* u$ alors $t \rhd^{\|*} u$. Montrer que si $t \rhd^{\|} u$ alors $t \rhd^* u$. Montrer que si $t \rhd^{\|*} u$ alors $t \rhd^* u$. Montrer que la relation $\rhd$ est confluente.

## Exercice 3 (Le principe de récurrence nœthérienne)

Soit $R$ une relation définie sur un ensemble $E$. Une *suite de réductions* pour cette relation est une suite finie ou infinie $x_0, x_1, x_2, ...$ telle que pour tout $i$, $x_i \ R \ x_{i+1}$. On dit qu'un élément $x$ de $E$ *termine fortement* si toute suite de réductions issue de $x$ est finie.

On dit que la relation $R$ *termine fortement* ou encore qu'elle est *bien fondée* ou encore qu'elle est *nœthérienne* si tout élément termine fortement.

1. Montrer qu'un élément qui termine fortement termine.

2. Donner une relation pour laquelle tout élément termine mais il existe des éléments qui ne terminent pas fortement.

3. Soit $R$ une relation sur un ensemble $E$. On dit qu'un élément $u$ est un réduit de $t$, $t \ R^+ \ u$, s'il existe une suite de réductions non réduite à un élément qui va de $t$ à $u$. Soit $A$ un sous-ensemble de $E$ tel que

   *pour tout élément $x$ de $E$*
   *si tous les réduits de $x$ sont dans $A$ alors $x$ est dans $A$*

   Montrer que si $x$ n'est pas dans $A$, il ne termine pas fortement. Montrer que si $x$ termine fortement, il appartient à $A$. Montrer que $R$ est bien fondée alors tous les éléments de $E$ appartiennent à $A$.

## Exercice 4 (Le théorème de Newman)

Une relation $R$ définie sur un ensemble $E$ est dite *localement confluente* si à chaque fois que $t \ R \ u$ et $t \ R \ v$, il existe un élément $w$ tel que $u \ R^* \ w$ et $v \ R^* \ w$.

1. On considère un ensemble formé de quatre éléments $a$, $b$, $c$ et $d$ et la relation définie par $a \ R \ b$, $b \ R \ a$, $a \ R \ c$ et $b \ R \ d$. Cette relation est-elle localement confluente ? Est-elle confluente ? Une relation localement confluente est-elle confluente ?

2. Montrer qu'une relation bien fondée et localement confluente est confluente.