Logique et calculabilité - PC4

La *fonction d'Ackermann* est définie par $A_0(x) = 2^x$ et $A_{n+1}(x) = \underbrace{A_n \circ ... \circ A_n}_{x \text{ fois}}(1)$.

C'est-à-dire

$$A_0(x) = 2^x$$

$$A_{n+1}(0) = 1$$

$$A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x))$$

1. Montrer que pour tout i et pour tout x, $A_i(x) \geq x + 1$.

2. Montrer que pour tout i, la fonction $x \mapsto A_i(x)$ est strictement croissante.

3. Montrer que pour tout x, la fonction $i \mapsto A_i(x)$ est croissante.

4. Montrer que pour tout x, $A_0(x) \geq 2x$ et si $x \geq 2$ alors $A_0(x) \geq x + 2$. Montrer que pour tout i et pour tout x, $A_i(x) \geq 2x$ et si $x \geq 2$ alors $A_i(x) \geq x + 2$.

5. Montrer que si $x \geq 2$, alors $A_{i+1}(x+2) \geq A_i(A_i(x+2))$. Montrer que si $x \geq 4$, alors $A_{i+1}(x) \geq A_i(A_i(x))$.

6. On dit qu'une fonction f d'arité n est *dominée* par une une fonction unaire g si pour tout $x_1, ..., x_n$, $f(x_1, ..., x_n) \leq g(max(x_1, ..., x_n, 4))$.

   Montrer que les projections, les fonctions identiquement nulles et la fonction successeur sont toutes dominées par la fonction A_0, c'est-à-dire par la fonction $x \mapsto 2^x$.

7. Soient $g_1, ..., g_m$ et h et des fonctions respectivement dominées par les fonctions A_{i_1}, ..., A_{i_m} et A_j Soient k le plus grand des éléments i_1, ..., i_m et j. Montrer que la composée de h et $g_1, ..., g_m$ est est dominée par A_{k+1}.

8. Soient g et h des fonctions dominées par A_i et A_j et soit k le plus grand élément de i et j. Soit la fonction f, définie par récurrence à partir de g et h. Montrer que $f(x_1, ...x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(y + max(x_1, ..., x_{n-1}, 4))$. Montrer que $f(x_1, ...x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(2\ max(x_1, ..., x_{n-1}, y, 4))$. Montrer que $f(x_1, ...x_{n-1}, y) \leq A_{k+1}(A_{k+1}(max(x_1, ..., x_{n-1}, y, 4)))$.

   Montrer que f est dominée par A_{k+2}.

9. Montrer que pour toute fonction récursive primitive f, il existe un entier i tel que f soit dominée par A_i.

10. Montrer que la fonction $i \mapsto A_i(i)$ n'est pas récursive primitive.

11. Montrer que la fonction d'Ackermann n'est pas récursive primitive.