Logique et calculabilité - PC3

On cherche à construire un modèle dans lequel tous les axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel sont valides sauf l'axiome de l'infini.

Soit V_n la suite d'ensembles définie par récurrence par $V_0 = \varnothing$ et $V_{i+1} = \wp(V_i)$. Soit $V_\omega = \cup_i V_i$. Soit le modèle $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_\iota, \mathcal{M}_\sigma, \hat{\epsilon}_2, \hat{=}, \hat{\in})$ où

- $\mathcal{M}_\iota = V_\omega$,
- $\mathcal{M}_\sigma = \wp(\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota)$,
- $\hat{\epsilon}_2$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\sigma$ dans $\{0, 1\}$ telle que $\hat{\epsilon}_2(a, b, c) = 1$ si (a, b) appartient à c et $\hat{\epsilon}_2(a, b, c) = 0$ sinon,
- $\hat{=}$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota$ dans $\{0, 1\}$ telle que $\hat{=}(a, b) = 1$ si $a = b$ et $\hat{=}(a, b) = 0$ sinon,
- $\hat{\in}$ la fonction de $\mathcal{M}_\iota \times \mathcal{M}_\iota$ dans $\{0, 1\}$ telle que $\hat{\in}(a, b) = 1$ si a appartient à b et $\hat{\in}(a, b) = 0$ sinon.

1. Montrer que tous les V_i sont des ensembles finis.
2. Montrer que tous les éléments de V_ω sont des ensembles finis.
3. Montrer que $V_i \subseteq V_{i+1}$.
4. Montrer que si $a \in V_\omega$ et $b \in a$, alors $b \in V_\omega$.
5. Soit j un entier et E un ensemble dont tous les éléments appartiennent à V_{j+1}, montrer que

$$(\bigcup_{b \in E} b) \in V_{j+1}$$

Soit c un élément de V_ω, montrer que

$$(\bigcup_{b \in c} b) \in V_\omega$$

6. Montrer que

$$[\![\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v\ (w \in v \wedge v \in x)))]\!] = 1$$

7. Soit c un élément de V_ω, montrer que

$$\wp(c) \in V_\omega$$

8. Montrer que l'axiome des parties est valide dans $\mathcal{M}$.
9. Soit $b_1, ..., b_n$ des éléments de V_ω. Montrer que l'ensemble $\{b_1, ..., b_n\}$ appartient à V_ω.

Soit c un élément de V_ω et r une relation binaire fonctionnelle. Montrer que l'ensemble des images des éléments de c par r appartient à V_ω.

10. Montrer que l'axiome de remplacement est valide dans $\mathcal{M}$.

11. Monter que l'axiome d'extensionalité est valide dans $\mathcal{M}$.

12. Montrer que les axiomes de l'égalité sont valides dans $\mathcal{M}$. Montrer que le schéma de compréhension binaire est valide dans $\mathcal{M}$.

13. Soit la suite d'ensembles définie par récurrence par $e_0 = \varnothing, e_1 = \{e_0\}, e_2 = \{e_0, e_1\}, e_3 = \{e_0, e_1, e_2\}, ..., e_{i+1} = e_i \cup \{e_i\}$, ... et E un ensemble contenant tous les e_i. Montrer que E est un ensemble infini. Montrer que E n'est pas un élément de V_ω.

14. Montrer que l'axiome de l'infini n'est pas valide dans $\mathcal{M}$.

15. Montrer que l'axiome de l'infini n'est pas démontrable à partir des autres axiomes de ZF.