Logique et calculabilité - PC2

Exercice 1

Montrer que si le séquent $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A'$ est démontrable alors les séquents $\Gamma \vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A' \wedge B)$, $\Gamma \vdash (B \wedge A) \Leftrightarrow (B \wedge A')$, $\Gamma \vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A' \vee B)$, $\Gamma \vdash (B \vee A) \Leftrightarrow (B \vee A')$, $\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A' \Rightarrow B)$, $\Gamma \vdash (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (B \Rightarrow A')$, $\Gamma \vdash (\neg A) \Leftrightarrow (\neg A')$, $\Gamma \vdash (\forall x\ A) \Leftrightarrow (\forall x\ A')$ et $\Gamma \vdash (\exists x\ A) \Leftrightarrow (\exists x\ A')$ sont démontrables.

Exercice 2 : Le schéma de remplacement

Soit A une proposition ne contenant pas le symbole ϵ_2 et dont les variables libres sont parmi $x_1, ..., x_n, y, z$. On écrit $A[t, u]$ la proposition $(t/y, u/z)A$. Montrer que la proposition

$$\forall x_1 ... \forall x_m\ ((\forall y \forall z \forall z'\ ((A[y, z] \wedge A[y, z']) \Rightarrow z = z')) \Rightarrow \forall a \exists b \forall z\ (z \in b \Leftrightarrow \exists y\ (y \in a \wedge A[y, z])))$$

est démontrable dans ZF.

Exercice 3 : Le schéma de séparation

Soit B une proposition ne contenant pas le symbole ϵ_2 et dont les variables libres sont parmi $x_1, ..., x_n, y$. On écrit $B[t]$ la proposition $(t/y)B$. Montrer la proposition

$$\forall x_1 ... \forall x_n \forall a \exists b \forall y\ (y \in b \Leftrightarrow (y \in a \wedge B[y]))$$

est démontrable dans ZF.

Exercice 4 : Le théorème de la paire

Soit un la proposition $\forall y\ (y \in x \Leftrightarrow vide[y])$. On écrit $un[t]$ la proposition $(t/x)un$. Soit $deux$ la proposition $\forall y\ (y \in x \Leftrightarrow (vide[y] \vee un[y]))$. On écrit $deux[t]$ la proposition $(t/x)deux$.

Montrer que les propositions $\exists x\ vide[x]$, $\exists x\ un[x]$, $\exists x\ deux[x]$ et $\forall x\ \neg(vide[x] \wedge un[x])$ sont démontrables dans ZF.

Montrer la proposition

$$\forall x \forall y \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$$

est démontrable dans ZF.

Exercice 5 : Les couples

En théorie des ensembles, le couple (a, b) est l'ensemble qui contient les éléments $\{a\}$ et $\{a, b\}$. Écrire une proposition utilisant uniquement les symboles $=$ et $\in$ qui exprime que le couple formé des éléments x et y est égal à z. Écrire une proposition qui exprime que le couple formé des éléments x et y est un élément de z.

Exercice 6 : La réunion de deux ensembles

Montrer que la proposition

$$\forall x \forall y \exists z \forall w \ (w \in z \Leftrightarrow (w \in x \vee w \in y))$$

est démontrable dans ZF.

Exercice 7

Monter que les propositions suivantes sont démontrables.

$$\forall x \exists y \ Succ[x, y]$$

$$\forall x \forall y \forall y' \ ((Succ[x, y] \wedge Succ[x, y']) \Rightarrow y = y')$$

$$\forall x \forall y \ \neg(Succ[x, y] \wedge vide[y])$$

Exercice 8 : Les entiers de Von Neumann

En théorie des ensembles, les entiers sont les ensembles suivants $0 = \varnothing, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}, ...$ On peut remarquer que tous les entiers appartiennent à l'ensemble I. On définit l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ comme l'intersection de tous les sous-ensembles de I qui contiennent 0 et qui sont clos par l'opération successeur. Écrire une proposition utilisant uniquement les symboles $=$ et $\in$ qui exprime que x appartient à l'ensemble $\mathbb{N}$.

Écrire une proposition qui exprime le principe de récurrence : si un ensemble contient 0 et est clos par successeur alors il contient tous les entiers. Montrer cette proposition est démontrable dans ZF.