École polytechnique **M1 d'Informatique**

Logique et calculabilité

Composition

Gilles Dowek

Lundi 7 Décembre 2009, 2h

Exercice 1 (4 points)

1. Quelles sont les variables libres de la proposition
$$(\forall x\ P(x)) \wedge P(x) \wedge P(x) \wedge P(y)$$
?
2. Quelles sont ses variables liées ?
3. Donner une proposition alphabétiquement équivalente à celle-ci dans laquelle l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées sont disjoints.

Exercice 2 (4 points)

1. Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent
$$\neg\neg A, \neg A \vdash A$$
2. Donner une démonstration en déduction naturelle du séquent
$$\neg\neg A \vdash A$$

Exercice 3 (8 points)

On se donne un symbole de prédicat binaire $<$ et on considère les propositions suivantes.

A (antireflexivité)
$$\forall x\ \neg(x < x)$$
T (transitivité)
$$\forall x \forall y \forall z\ ((x < y \wedge y < z) \Rightarrow (x < z))$$
N (non trivialité)
$$\exists x \exists y\ (x < y)$$
D (densité)
$$\forall x \forall y\ (x < y \Rightarrow \exists w\ (x < w \wedge w < y))$$

1. Montrer qu'il existe un modèle de la théorie formée des axiomes A, T, N et $\neg D$.
2. Montrer qu'il existe un modèle de la théorie formée des axiomes A, T, N et D.
3. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie formée des axiomes A, T, N et D. Montrer qu'il existe une suite $a_0, a_1, a_2, ...$ telle que pour tout i, $a_i \hat{<} a_{i+1}$. Montrer que le modèle $\mathcal{M}$ est infini.
4. Montrer que la proposition $\neg(A \wedge T \wedge N \wedge D)$ n'est pas démontrable en logique des prédicats.
5. Montrer que cette proposition est valide dans tous les modèles finis.
6. Existe-t-il un modèle dénombrable de la théorie formée des axiomes A, T, N et D ?

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction f qui à un entier n associe l'entier $2 \times n$.

1. Donner un système de réécriture qui transforme l'expression $F(n)$ où n est un nombre entier écrit avec les symboles 0 et S en le nombre entier $f(n)$ écrit de la même manière.
2. Donner un terme du lambda-calcul qui représente la fonction f, sur les entiers de Church.
3. Donner une machine de Turing qui, si elle démarre avec un entier n écrit à l'aide de bâtons sur la première bande, écrit sur la deuxième bande $f(n)$ bâtons.