

## Logique et calculabilité

## Composition

Gilles Dowek

Lundi 3 Décembre 2007, 2h

**Exercice 1**

Donner une démonstration en déduction naturelle des propositions suivantes

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P$$

$$(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$$

$$(\exists y \forall x P(x, y)) \Rightarrow (\forall x \exists y P(x, y))$$

$$P(0) \Rightarrow (\forall x (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow P(S(S(0)))$$

**Exercice 2**

Donner un modèle égalitaire dans lequel la proposition

$$\forall x \forall y \forall z ((x + y) + z = x + (y + z))$$

est valide. Donner un modèle égalitaire dans lequel cette proposition n'est pas valide.

**Exercice 3**

Soit une théorie  $\mathcal{T}$  exprimée dans un langage  $\mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{T}'$  la théorie formée des mêmes axiomes mais dans un langage  $\mathcal{L}'$  comprenant les symboles de  $\mathcal{L}$  et une constante  $c$  supplémentaire. Montrer que la théorie  $\mathcal{T}'$  est une extension conservatrice de  $\mathcal{T}$ .

## Exercice 4

Soit l'ensemble de règles de réécriture

$$f(x, x) \longrightarrow d$$

$$f(g(x), x) \longrightarrow g(d)$$

$$c \longrightarrow g(c)$$

Donner un exemple de terme qui se réduit sur deux deux termes irréductibles distincts.

## Exercice 5

Donner un terme du lambda-calcul qui calcule la somme de deux entiers de Church.

## Exercice 6

Montrer que le séquent  $P \vee Q \vdash P$  n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents sans coupures. En a-t-il une dans le calcul des séquents avec la règle de coupure ?

## Exercice 7

Montrer que l'on obtient un système équivalent au calcul des séquents sans coupures si on restreint la règle *axiome* au cas où la proposition  $A$  est atomique.