Logique et Calculabilité
INF551

$\exists \Rightarrow \forall$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours III

Le théorème de correction
et le théorème de complétude

Résumé des épisodes précédents

Une notion de démonstration

Une notion de modèle

I. Le théorème de correction

Motivation

Comment démontrer qu’une proposition n’est pas démontrable ?

Le théorème de correction

Si un séquent est démontrable, alors il est valide dans tous les modèles

Simple récurrence sur la structure d'une démonstration

$$\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B}$$

Hypothèse de récurrence : $\Gamma \vdash A$ et $\Gamma \vdash B$ valides dans tous les modèles

$\Gamma = \{G_1, ..., G_n\}$ et $G = G_1 \wedge .... \wedge G_n$

$G \Rightarrow A$ et $G \Rightarrow B$ valides dans tous les modèles donc $G \Rightarrow (A \wedge B)$ est valide dans tous les modèles

Idem pour les autres règles

Un corollaire

Soit

- $\mathcal{T}$ une théorie et
- $\mathcal{M}$ un modèle dans lequel tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont valides
- A une proposition

Si A est démontrable dans $\mathcal{T}$, alors A est valide dans $\mathcal{M}$

Il existe un sous-ensemble fini Γ de $\mathcal{T}$ tel que $\Gamma \vdash A$ démontrable

$\Gamma \vdash A$ valide dans $\mathcal{M}$ donc A valide dans $\mathcal{M}$

On contraposé

Soit

- $\mathcal{T}$ une théorie et
- $\mathcal{M}$ un modèle dans lequel tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont valides
- A une proposition

Si A n'est pas valide dans $\mathcal{M}$ alors A est n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Une méthode pour montrer que A n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Trouver un modèle $\mathcal{M}$

dans lequel tous les axiomes de $\mathcal{T}$ sont valides

dans lequel A n'est pas valide

Un exemple

Soit la théorie $\mathcal{T}$ formée de l'axiome $P(c) \vee Q(c)$

Montrer que $P(c)$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Montrer que $Q(c)$ n'est pas démontrable dans $\mathcal{T}$

Les trois formes du théorème de correction

1. Si A démontrable dans $\mathcal{T}$ alors, A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$

2. Si il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A, alors A non démontrable dans $\mathcal{T}$

3. Si $\mathcal{T}$ a un modèle alors $\mathcal{T}$ est cohérente

II. Le théorème de complétude

Quelle est l'universalité de cette méthode ?

À chaque fois qu'il y a une proposition non démontrable dans une théorie $\mathcal{T}$, existe-t-il toujours un modèle qui sépare $\mathcal{T}$ de A ?

Quelle est l'universalité de cette méthode ?

À chaque fois qu'il y a une proposition non démontrable dans une théorie $\mathcal{T}$, existe-t-il toujours un modèle qui sépare $\mathcal{T}$ de A ?

Le théorème de correction a-t-il une réciproque ?

Quelle est l'universalité de cette méthode ?

À chaque fois qu'il y a une proposition non démontrable dans une théorie $\mathcal{T}$, existe-t-il toujours un modèle qui sépare $\mathcal{T}$ de A ?

Le théorème de correction a-t-il une réciproque ?

Oui : le théorème de complétude de Gödel

Quelle est l'universalité de cette méthode ?

À chaque fois qu'il y a une proposition non démontrable dans une théorie $\mathcal{T}$, existe-t-il toujours un modèle qui sépare $\mathcal{T}$ de A ?

Le théorème de correction a-t-il une réciproque ?

Oui : le théorème de complétude de Gödel

Valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$ ssi démontrable dans $\mathcal{T}$

Un théorème aussi central que le théorème de correction

Les trois formes du théorème de complétude

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

Les trois formes du théorème de complétude

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. et *2.* équivalentes : trivial

Les trois formes du théorème de complétude

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. et *2.* équivalentes : trivial

2. implique *3.* : trivial

Les trois formes du théorème de complétude

1. Si A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$, alors A démontrable dans $\mathcal{T}$

2. Si A non démontrable dans $\mathcal{T}$, alors il existe un modèle de $\mathcal{T}$ qui n'est pas un modèle de A

3. Si $\mathcal{T}$ est cohérente, alors $\mathcal{T}$ a un modèle

1. et *2.* équivalentes : trivial

2. implique *3.* : trivial

3. implique *2.* :

A non démontrable dans $\mathcal{T}$

$\mathcal{T}, \neg A$ cohérente

$\mathcal{T}, \neg A$ a un modèle $\mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ modèle de $\mathcal{T}$ mais pas de A

III. La démonstration du théorème de complétude

$\boxed{\textit{3.}\ \text{Si } \mathcal{T} \text{ est cohérente, alors } \mathcal{T} \text{ a un modèle}}$

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie cohérente $\mathcal{T}$

On veut construire un modèle $\mathcal{M}$

$\boxed{\text{3. Si } \mathcal{T} \text{ est cohérente, alors } \mathcal{T} \text{ a un modèle}}$

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie cohérente $\mathcal{T}$

On veut construire un modèle $\mathcal{M}$

Que choisir comme éléments de $\mathcal{M}$?

Pas grand chose à se mettre sous la dent : $\mathcal{L}$, ses sortes, ses symboles, ses termes et ses propositions, $\mathcal{T}$, ses axiomes, ...

$\boxed{\text{3. Si } \mathcal{T} \text{ est cohérente, alors } \mathcal{T} \text{ a un modèle}}$

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie cohérente $\mathcal{T}$

On veut construire un modèle $\mathcal{M}$

Que choisir comme éléments de $\mathcal{M}$?

Pas grand chose à se mettre sous la dent : $\mathcal{L}$, ses sortes, ses symboles, ses termes et ses propositions, $\mathcal{T}$, ses axiomes, ...

Les termes clos du langage de la théorie $\mathcal{T}$

Une première tentative

$\mathcal{M}_s$ ensemble des termes clos de sorte s du langage

$\hat{f}$ fonction associant $f(t_1, ..., t_n)$ à $t_1, ..., t_n$

(si t clos $[\![t]\!] = t$)

$\hat{P}$ la fonction associant 1 ou 0 à $t_1, ..., t_n$, selon que $P(t_1, ..., t_n)$ démontrable ou non

Trop naïf

Un seul axiome $P(c) \vee Q(c)$

Les propositions $P(c)$, $\neg P(c)$, $Q(c)$, $\neg Q(c)$ non démontrables

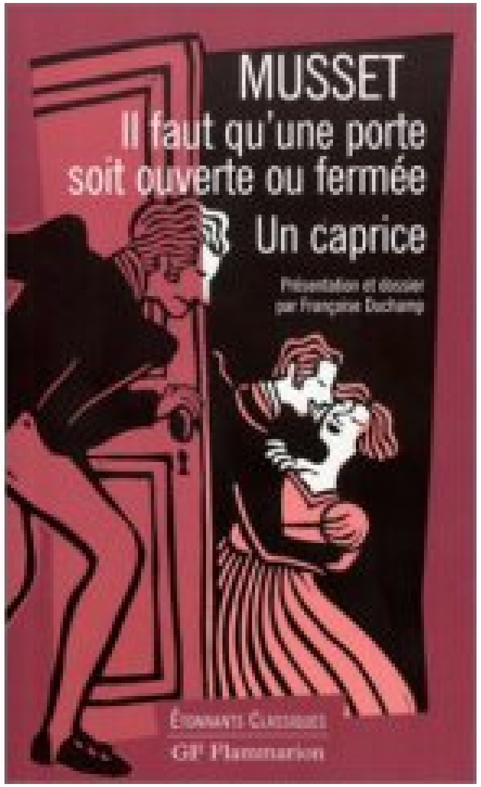
$\mathcal{M} = \{c\}$, $\hat{P}(c) = 0$, $\hat{Q}(c) = 0$

donc $P(c) \vee Q(c)$ non valide dans $\mathcal{M}$

Ni $P(c)$ ni $\neg P(c)$ n'est démontrable pas de raison de choisir 0 plutôt que 1 pour $\hat{P}(c)$

Ajouter des axiomes

Il faut que $P(c)$ ou $\neg P(c)$!



Si on ajoute l'axiome $P(c)$, alors $\hat{P}(c) = 1$

Si on ajoute l'axiome $\neg P(c)$, alors, comme $P(c) \vee Q(c)$,
$Q(c)$ est démontrable et $\hat{Q}(c) = 1$

Ajouter des axiomes... et des constantes

Autre exemple :

Une constante c

Deux axiomes $\neg P(c)$ et $\exists x\ P(x)$

$\mathcal{M} = \{c\}$

$\hat{P}(c) = 0$

$\exists x\ P(x)$ n'est pas valide dans ce modèle

Ajouter une constante d et un axiome $P(d)$ pour avoir $\mathcal{M} = \{c, d\}$

La constante d : témoin (de Henkin) de l'existence d'un objet vérifiant P

La complétion d'une théorie

Langage $\mathcal{L}$, théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$, cohérente

Theorem 1 *Il existe $\mathcal{L}'$ ($\supseteq \mathcal{L}$) et $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{L}'$ ($\mathcal{U} \supseteq \mathcal{T}$) t.q.*

1. *$\mathcal{U}$ est cohérente*
2. *A (close) ou $\neg A$ est démontrable (et même axiome) dans $\mathcal{U}$*
3. *Si $\exists x\ A$ dém. dans $\mathcal{U}$ alors il existe c t.q. $(c/x)A$ dém. dans $\mathcal{U}$*

Comment le prouve-t-on ?

On passe en revue les propositions closes l'une après l'autre

1. Si A est démontrable, on la prend comme axiome
2. Si $\neg A$ est démontrable, on la prend comme axiome
3. Si ni A ni $\neg A$ n'est démontrable, on choisit A comme axiome

Si $\exists x\ B$ on ajoute un axiome $(c/x)B$ où c nouvelle constante

Techniquement :

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte

$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$

Techniquement :

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte

$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$

Prop. closes de $\mathcal{L}'$ dénombrables : énumération $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Techniquement :

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte

$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$

Prop. closes de $\mathcal{L}'$ dénombrables : énumération $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Famille de théories $\mathcal{U}_n$

$\mathcal{U}_0 = \mathcal{T}$

Techniquement :

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte

$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$

Prop. closes de $\mathcal{L}'$ dénombrables : énumération $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Famille de théories $\mathcal{U}_n$

$\mathcal{U}_0 = \mathcal{T}$

1. Si A_n démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = A_n$
2. si $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = \neg A_n$
3. si ni A_n ni $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = A_n$

Techniquement :

$\mathcal{H} = \{c_i^s\}$ infinité de constantes $c_0^s, c_1^s, c_2^s, \ldots$ de chaque sorte

$\mathcal{L}' = (\mathcal{S}, \mathcal{F} \uplus \mathcal{H}, \mathcal{P})$

Prop. closes de $\mathcal{L}'$ dénombrables : énumération $A_0, A_1, A_2, \ldots$

Famille de théories $\mathcal{U}_n$

$\mathcal{U}_0 = \mathcal{T}$

1. Si A_n démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = A_n$
2. si $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = \neg A_n$
3. si ni A_n ni $\neg A_n$ démontrable dans $\mathcal{U}_n$, on pose $B = A_n$

Si B pas de la forme $\exists x\ C$, on pose $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B\}$

si $B = \exists x\ C$ alors, on pose $\mathcal{U}_{n+1} = \mathcal{U}_n \cup \{B, (c_i^s/x)C\}$ (c_i^s première constante pas dans $\mathcal{U}_n$)

Techniquement :

$$\mathcal{U} = \bigcup_i \mathcal{U}_i$$

1. $\mathcal{U}$ est cohérente
2. A ou $\neg A$ est démontrable (et même axiome) dans $\mathcal{U}$
3. Si $\exists x\ A$ dém. dans $\mathcal{U}$ alors il existe c t.q. $(c/x)A$ dém. dans $\mathcal{U}$

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

– $\neg A$ dém. ssi A non dém.

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

- $\neg A$ dém. ssi A non dém.

- $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

– $\neg A$ dém. ssi A non dém.

– $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.

– $A \vee B$ dém. ssi A dém. ou B dém.

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

- $\neg A$ dém. ssi A non dém.
- $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.
- $A \vee B$ dém. ssi A dém. ou B dém.

Si $A \vee B$ dém., alors A dém. ou $\neg A$ dém. Si $\neg A$ dém., alors B dém.

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

- $\neg A$ dém. ssi A non dém.

- $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.

- $A \vee B$ dém. ssi A dém. ou B dém.

  Si $A \vee B$ dém., alors A dém. ou $\neg A$ dém. Si $\neg A$ dém., alors B dém.

- $A \Rightarrow B$ dém. ssi (si A est dém. alors B dém).

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

- $\neg A$ dém. ssi A non dém.
- $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.
- $A \vee B$ dém. ssi A dém. ou B dém.

  Si $A \vee B$ dém., alors A dém. ou $\neg A$ dém. Si $\neg A$ dém., alors B dém.
- $A \Rightarrow B$ dém. ssi (si A est dém. alors B dém).
- $\exists x\ A$ est dém. ssi il existe un terme clos t, $(t/x)A$ dém.

Les propriétés de la théorie $\mathcal{U}$

Pour toutes propositions closes A et B,

- $\neg A$ dém. ssi A non dém.
- $A \wedge B$ dém. ssi A dém. et B dém.
- $A \vee B$ dém. ssi A dém. ou B dém.

  Si $A \vee B$ dém., alors A dém. ou $\neg A$ dém. Si $\neg A$ dém., alors B dém.
- $A \Rightarrow B$ dém. ssi (si A est dém. alors B dém).
- $\exists x\ A$ est dém. ssi il existe un terme clos t, $(t/x)A$ dém.
- $\forall x\ A$ dém. ssi pour tout terme clos t, $(t/x)A$ dém.

Le théorème de complétude (ouf)

$\mathcal{M}_s$ ensemble des termes clos de sorte s de $\mathcal{L}'$

$\hat{f}$ fonction associant $f(t_1, ..., t_n)$ à $t_1, ..., t_n$

$\hat{P}$ la fonction associant 1 ou 0 à $t_1, ..., t_n$, selon que $P(t_1, ..., t_n)$ démontrable dans $\mathcal{U}$ ou non

A valide dans $\mathcal{M}$ ssi A démontrable dans $\mathcal{U}$ (rec. sur A)

$\mathcal{M}$ modèle de $\mathcal{U}$ donc de $\mathcal{T}$

Cette démonstration ne marche que si $\mathcal{L}$ est un langage fini ou dénombrable (énumération)

Extension aux langages non dénombrables (énumération transfinie)

IV. Des applications du théorème de complétude

La cohérence relative

On ajoute des axiomes à ZF (sans en retirer) : axiome du choix, hypothèse du continu,. . .

La cohérence relative

On ajoute des axiomes à ZF (sans en retirer) : axiome du choix, hypothèse du continu,...

"ZF^+ cohérente" non démontrable dans ZF

(et donc dans les mathématiques ordinaires)

La cohérence relative

On ajoute des axiomes à ZF (sans en retirer) : axiome du choix, hypothèse du continu,...

"ZF^+ cohérente" non démontrable dans ZF

(et donc dans les mathématiques ordinaires)

C'est une conséquence du second théorème d'incomplétude de Gödel : une théorie ne démontre jamais sa propre cohérence (ni *a fortiori* celle d'une extension)

La cohérence relative

Mais ! on peut quand même chercher alors à démontrer

“si ZF cohérente alors ZF^+ cohérente”

La cohérence relative

Mais ! on peut quand même chercher alors à démontrer

"si ZF cohérente alors ZF^+ cohérente"

On pose un modèle de ZF et on construit un modèle de ZF^+

La cohérence relative

Mais ! on peut quand même chercher alors à démontrer

"si ZF cohérente alors ZF^+ cohérente"

On pose un modèle de ZF et on construit un modèle de ZF^+

Complétude (cohérence donc modèle), puis correction (modèle donc cohérence)

La conservativité

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$

On étend la théorie en ajoutant des concepts :

nouvelles sortes, nouveaux symboles $\mathcal{L}'(\supseteq \mathcal{L})$ et nouveaux axiomes $\mathcal{T}'(\supseteq \mathcal{T})$

La conservativité

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$

On étend la théorie en ajoutant des concepts :

nouvelles sortes, nouveaux symboles $\mathcal{L}'(\supseteq \mathcal{L})$ et nouveaux axiomes $\mathcal{T}'(\supseteq \mathcal{T})$

On peut démontrer plus de choses

On ne veut pas démontrer plus de choses sur les anciens concepts

On ne veut pas démontrer plus de propositions exprimables dans $\mathcal{L}$

La conservativité

Un langage $\mathcal{L}$, une théorie $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{L}$

On étend la théorie en ajoutant des concepts :

nouvelles sortes, nouveaux symboles $\mathcal{L}'(\supseteq \mathcal{L})$ et nouveaux axiomes $\mathcal{T}'(\supseteq \mathcal{T})$

On peut démontrer plus de choses

On ne veut pas démontrer plus de choses sur les anciens concepts

On ne veut pas démontrer plus de propositions exprimables dans $\mathcal{L}$

Si c'est le cas, on appelle ça une Extension conservatrice

Exemple

Une constante c

Un symbole de prédicat P

Aucun axiome

On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$

On peut démontrer de nouvelles choses : $P(d)$

Extension conservatrice ?

Exemple

Une constante c

Un symbole de prédicat P

Un axiome $P(c)$

On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$

On peut démontrer de nouvelles choses : $P(d)$

Extension conservatrice ?

Extension d'un modèle

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$

Soit $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$

Extension d'un modèle

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$

Soit $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$

Definition: "$\mathcal{M}'$ modèle de $\mathcal{L}'$ est une extension de $\mathcal{M}$" si

– même domaines pour les sortes de $\mathcal{L}$, mêmes $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les symboles de $\mathcal{L}$

– nouveaux domaines pour les nouvelles sortes,
nouveaux $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les nouveaux symboles

Extension d'un modèle

Soit $\mathcal{L}$ un langage et $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{L}$

Soit $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$

Definition: "$\mathcal{M}'$ modèle de $\mathcal{L}'$ est une extension de $\mathcal{M}$" si

– même domaines pour les sortes de $\mathcal{L}$, mêmes $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les symboles de $\mathcal{L}$

– nouveaux domaines pour les nouvelles sortes,
nouveaux $\hat{f}$, $\hat{P}$ pour les nouveaux symboles

Trivial : pour tout A dans $\mathcal{L}$, $[\![A]\!]_\phi^{\mathcal{M}} = [\![A]\!]_\phi^{\mathcal{M}'}$

Le théorème

$\mathcal{T}'$ extension conservatrice de $\mathcal{T}$

si tout modèle de $\mathcal{T}$ s'étend en un modèle de $\mathcal{T}'$

Le théorème

$\mathcal{T}'$ extension conservatrice de $\mathcal{T}$

si tout modèle de $\mathcal{T}$ s'étend en un modèle de $\mathcal{T}'$

Preuve :

A démontrable dans $\mathcal{T}'$

$\Rightarrow$ A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}'$

$\Rightarrow$ A valide dans tous les modèles de $\mathcal{T}$

$\Rightarrow$ A démontrable dans $\mathcal{T}$

$\Rightarrow$: Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}$ s'étend en $\mathcal{M}'$, A valide dans $\mathcal{M}'$, donc dans $\mathcal{M}$

Exemple

Un axiome $P(c)$

On ajoute une constante d et un axiome $P(d)$

Extension conservatrice ?

Soit un modèle $\mathcal{M}$, $\hat{P}$, $\hat{c}$

$\hat{d}$?

L'arithmétique sans classes

Au lieu d'avoir une sortes pour les classes, le schéma ce compréhension et l'axiome de récurrence

$$\forall c\, (0 \epsilon c \Rightarrow \forall x\, (x \epsilon c \Rightarrow S(x) \epsilon c) \Rightarrow \forall y\, y \epsilon c)$$

On pose, pour chaque proposition A, un axiome

$$A[0] \Rightarrow \forall x\, (A[x] \Rightarrow A[S(x)]) \Rightarrow \forall y\, A[y]$$

où $A[t]$ notation pour $(t/x)A$

L'arithmétique (avec κ) est une extension conservatrice de l'arithmétique (sans κ)

(Un exemple de) Skolémisation

Un axiome $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Un axiome $\forall x\ \forall z\ (z \in \wp(x) \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Extension conservatrice

V. Des applications en algèbre

Lowenheim-Skolem

Généralisation du théorème de complétude de Gödel

Si $\mathcal{L}$ langage fini ou dénombrable

Remarque : si $\mathcal{T}$ a un modèle, alors $\mathcal{T}$ a un modèle fini ou dénombrable

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Pour tout ensemble fini $\kappa' \subseteq \kappa$, $\mathcal{T}_{\kappa'}$ est cohérente

(on peut étendre le modèle infini de $\mathcal{T}$ en un modèle de $\mathcal{T}_{\kappa'}$)

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Pour tout ensemble fini $\kappa' \subseteq \kappa$, $\mathcal{T}_{\kappa'}$ est cohérente

(on peut étendre le modèle infini de $\mathcal{T}$ en un modèle de $\mathcal{T}_{\kappa'}$)

Donc $\mathcal{T}_\kappa$ cohérente.

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Pour tout ensemble fini $\kappa' \subseteq \kappa$, $\mathcal{T}_{\kappa'}$ est cohérente

(on peut étendre le modèle infini de $\mathcal{T}$ en un modèle de $\mathcal{T}_{\kappa'}$)

Donc $\mathcal{T}_\kappa$ cohérente.

On applique le th. de complétude (en cardinalité quelconque) :

on a un modèle (syntaxique) de $\mathcal{T}_\kappa$

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Pour tout ensemble fini $\kappa' \subseteq \kappa$, $\mathcal{T}_{\kappa'}$ est cohérente

(on peut étendre le modèle infini de $\mathcal{T}$ en un modèle de $\mathcal{T}_{\kappa'}$)

Donc $\mathcal{T}_\kappa$ cohérente.

On applique le th. de complétude (en cardinalité quelconque) :

on a un modèle (syntaxique) de $\mathcal{T}_\kappa$

Il a même cardinal que κ (cardinal de $\mathcal{L}_\kappa$ est celui de κ car $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable)

Lowenheim-Skolem

Si une théorie $\mathcal{T}$ (sur un langage $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable) a un modèle infini,

alors $\mathcal{T}$ a un modèle de toute cardinalité infinie

Preuve: Pour tout ensemble κ, soit l'extension de $\mathcal{L}, \mathcal{T}$ suivante :

$\mathcal{L}_\kappa = \mathcal{L} \uplus \kappa$

$\mathcal{T}_\kappa = \mathcal{T} \uplus \{c \neq c' \mid c, c' \in \kappa\}$

Soit κ un ensemble infini (par exemple $\mathbb{R}$),

montrons qu'il existe un modèle de $\mathcal{T}$ de même cardinal que κ.

Pour tout ensemble fini $\kappa' \subseteq \kappa$, $\mathcal{T}_{\kappa'}$ est cohérente

(on peut étendre le modèle infini de $\mathcal{T}$ en un modèle de $\mathcal{T}_{\kappa'}$)

Donc $\mathcal{T}_\kappa$ cohérente.

On applique le th. de complétude (en cardinalité quelconque) :

on a un modèle (syntaxique) de $\mathcal{T}_\kappa$

Il a même cardinal que κ (cardinal de $\mathcal{L}_\kappa$ est celui de κ car $\mathcal{L}$ fini ou dénombrable)

Des modèles non dénombrables de l'arithmétique ?

des modèles dénombrables de l'analyse ?

Exemple : Les groupes

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z) = (x+(y+z))$$

$$\forall x (x + 0 = x)$$

$$\forall x (0 + x = x)$$

$$\forall x (I(x) + x = 0)$$

$$\forall x (x + I(x) = 0)$$

Peu intéressante en tant que théorie déductive

Mais ses modèles (égalitaires) sont intéressants pour eux-mêmes

Des groupes de toutes cardinalités

Lowenheim-Skolem : il existe des groupes de toutes les cardinalités infinies

Tout ensemble infini peut-être muni d'une structure de groupe

La suite

En PC : Un exemple de résultat d’indépendance

La prochaine fois : la notion de fonction calculable

Questions?