École polytechnique **M1 d'Informatique**

Logique et calculabilité

Corrigé de la Composition

Gilles Dowek

Lundi 8 Décembre 2008, 2h

Exercice 1

1. y
2. x

Exercice 2

1.

$$
\dfrac{
\dfrac{}{\exists y \forall x\ P(x,y) \vdash \exists y \forall x\ P(x,y)}\text{axiome}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,y) \vdash \forall x\ P(x,y)}\text{axiome}}{\exists y \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,y) \vdash P(x,y)}\forall\text{-élim}}{\exists y \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,y), \vdash \exists y\ P(x,y)}\exists\text{-intro}}{\exists y \forall x\ P(x,y), \forall x\ P(x,y), \vdash \forall x \exists y\ P(x,y)}\forall\text{-intro}
}{
\dfrac{\exists y \forall x\ P(x,y) \vdash \forall x \exists y\ P(x,y)}{\vdash (\exists y \forall x\ P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y\ P(x,y))}\Rightarrow\text{-intro}
}\exists\text{-élim}
$$

2. Non. $\mathcal{M} = \{0,1\}$, $\hat{P} = \{(0,1),(1,0)\}$.

Exercice 3

1. $\langle p,p \rangle$, $\langle d,d \rangle$, $\langle p,d \rangle$.

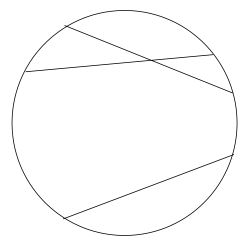
2.
$$P = \neg \exists x\ (x \in D \wedge x \in D')$$

3.
$$A_1 = \forall x \forall y\ (\neg(x =_d y) \Rightarrow \exists D\ (x \in D \wedge y \in D))$$
$$A_2 = \forall x \forall y\ \forall D\ \forall D'\ (((\neg(x =_d y)) \wedge x \in D \wedge y \in D \wedge x \in D' \wedge y \in D') \Rightarrow D =_d D')$$
$$A = A_1 \wedge A_2$$

4.
$$B_1 = \forall x \forall D\ ((\neg(x \in D)) \Rightarrow \exists D'\ (x \in D' \wedge P))$$
$$B_2 = \forall x \forall D \forall D' \forall D''\ (((\neg(x \in D)) \wedge x \in D' \wedge P \wedge x \in D'' \wedge (D''/D')P) \Rightarrow D' =_d D'')$$
$$B = B_1 \wedge B_2$$

5. Oui. Par deux points distincts de $\mathcal{M}_p$, il passe un unique segment de $\mathcal{M}_d$.

6. Non. Par un point de $\mathcal{M}_p$, extérieur à un segment de $\mathcal{M}_d$, il peut passer plusieurs segments de $\mathcal{M}_d$ qui ne coupent par le premier.



Exercice 4

1.
$$F(0) \longrightarrow 0$$
$$F(S(0)) \longrightarrow S(0)$$
$$F(S(S(x))) \longrightarrow F(x)$$

2.
$$\mathit{fun}\ n \rightarrow (n\ \underline{0}\ s)$$
où $s = \mathit{fun}\ n \rightarrow (n\ \underline{1}\ (\mathit{fun}\ x \rightarrow \underline{0}))$.

3. Six états : s_0 initial et s_5 final.
$$M((\times, \times), s_0) = ((\times, \times), s_0, 1)$$
$$M((|, b), s_0) = ((|, b), s_1, 1)$$
$$M((|, b), s_1) = ((|, b), s_0, 1)$$
$$M((b, b), s_0) = ((b, b), s_2, -1)$$
$$M((b, b), s_1) = ((b, b), s_3, -1)$$
$$M((|, b), s_2) = ((|, b), s_2, -1)$$
$$M((|, b), s_3) = ((|, b), s_3, -1)$$
$$M((\times, \times), s_2) = ((\times, \times), s_5, 0)$$
$$M((\times, \times), s_3) = ((\times, \times), s_4, 1)$$
$$M((|, b), s_4) = ((|, |), s_5, -1)$$