École polytechnique **M1 d'Informatique**

Logique et calculabilité

Corrigé de la composition

Gilles Dowek

Lundi 3 Décembre 2007, 2h

Exercice 1

Donner une démonstration en déduction naturelle des propositions suivantes

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P$$

$$(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$$

$$(\exists y \forall x \ P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y \ P(x,y))$$

$$P(0) \Rightarrow (\forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow P(S(S(0)))$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ \textit{axiome}}{P \wedge Q \vdash P}\ \wedge\textit{-élim}}{\vdash (P \wedge Q) \Rightarrow P}\ \Rightarrow\textit{-intro}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vee Q \vdash P \vee Q}\ \textit{axiome} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \vee Q, P \vdash P}\ \textit{axiome}}{P \vee Q, P \vdash Q \vee P}\ \vee\textit{-intro} \quad \dfrac{\dfrac{}{P \vee Q, Q \vdash Q}\ \textit{axiome}}{P \vee Q, Q \vdash Q \vee P}\ \vee\textit{-intro}}{P \vee Q \vdash Q \vee P}\ \vee\textit{-élim}}{\vdash (P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)}\ \Rightarrow\textit{-intro}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y \forall x \ P(x,y) \vdash \exists y \ \forall x \ P(x,y)}\ \textit{axiome} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\exists y \forall x \ P(x,y), \forall x \ P(x,y) \vdash \forall x \ P(x,y)}\ \textit{axiome}}{\exists y \forall x \ P(x,y), \forall x \ P(x,y) \vdash P(x,y)}\ \forall\textit{-élim}}{\exists y \forall x \ P(x,y), \forall x \ P(x,y) \vdash \exists y \ P(x,y)}\ \exists\textit{-intro}}{\exists y \forall x \ P(x,y) \vdash \exists y \ P(x,y)}\ \exists\textit{-élim}}{\exists y \forall x \ P(x,y) \vdash \forall x \exists y \ P(x,y)}\ \forall\textit{-intro}}{\vdash (\exists y \forall x \ P(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y \ P(x,y))}\ \Rightarrow\textit{-intro}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))}\ \textit{axiome}}{\Gamma \vdash P(S(0)) \Rightarrow P(S(S(0)))}\ \forall\textit{-élim} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))}\ \textit{axiome}}{\Gamma \vdash P(0) \Rightarrow P(S(0))}\ \forall\textit{-élim} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(0)}\ \textit{axiome}}{\Gamma \vdash P(S(0))}\ \Rightarrow\textit{-élim}}{\Gamma \vdash P(S(S(0)))}\ \Rightarrow\textit{-élim}}{P(0) \vdash (\forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow P(S(S(0)))}\ \Rightarrow\textit{-intro}}{\vdash P(0) \Rightarrow (\forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))) \Rightarrow P(S(S(0)))}\ \Rightarrow\textit{-intro}$$

où $\Gamma = P(0), \forall x \ (P(x) \Rightarrow P(S(x)))$.

Exercice 2

Donner un modèle égalitaire dans lequel la proposition

$$\forall x \forall y \forall z\ ((x+y)+z = x+(y+z))$$

est valide. Donner un modèle égalitaire dans lequel cette proposition n'est pas valide.

On pose $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$, on interprète le symbole + par l'addition dans le premier modèle et par la soustraction dans le second.

Exercice 3

Soit une théorie $\mathcal{T}$ exprimée dans un langage $\mathcal{L}$. Soit $\mathcal{T}'$ la théorie formée des mêmes axiomes mais dans un langage $\mathcal{L}'$ comprenant les symboles de $\mathcal{L}$ et une constante c supplémentaire. Montrer que la théorie $\mathcal{T}'$ est une extension conservatrice de $\mathcal{T}$.

On montre que tout modèle de $\mathcal{T}$ s'étend en un modèle de $\mathcal{T}'$. Soit $\mathcal{M}$ un modèle de $\mathcal{T}$. Soit a un élément de $\mathcal{M}$. On étend ce modèle en un modèle de $\mathcal{T}'$ en interprétant la constante c par l'élément a.

Exercice 4

Soit l'ensemble de règles de réécriture

$$f(x,x) \longrightarrow d$$

$$f(g(x),x) \longrightarrow g(d)$$

$$c \longrightarrow g(c)$$

Donner un exemple de terme qui se réduit sur deux deux termes irréductibles distincts.

Le terme $f(c,c)$ se réduit sur d et sur $g(d)$.

Exercice 5

Donner un terme du lambda-calcul qui calcule la somme de deux entiers de Church.

fun a → fun b → fun x → fun f → (a (b x f) f)

Exercice 6

Montrer que le séquent $P \vee Q \vdash P$ n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents sans coupures. En a-t-il une dans le calcul des séquents avec la règle de coupure ?

On montre par récurrence sur la structure de la démonstration que le séquent $P \vee Q, ..., P \vee Q, Q, ..., Q \vdash P, ..., P$ n'a pas de démonstration dans le calcul des séquents sans coupures. Si la dernière règle d'une telle démonstration est une contraction, on applique l'hypothèse de récurrence. Si c'est une règle $\vee$-gauche, on applique l'hypothèse de récurrence à la seconde prémisse. Cette règle ne peut pas être la règle axiome, *ni aucune autre règle du calcul des séquents sans coupures.*

D'après le théorème d'élimination des coupures, si ce séquent avait une démonstration dans le calcul des séquents, il en aurait une dans le calcul des séquents sans coupures.

Exercice 7

Montrer que l'on obtient un système équivalent au calcul des séquents sans coupures si on restreint la règle *axiome* au cas où la proposition A est atomique.

On montre que si A est une proposition quelconque, le séquent $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ est démontrable dans le système restreint. Par récurrence sur la structure de A, si A est atomique, on applique la règle axiome. *Si A est de la forme $B \wedge C$, alors par hypothèse de récurrence les séquents $\Gamma, B, C \vdash B, \Delta$ et $\Gamma, B, C \vdash C, \Delta$ ont des démonstrations π_1 et π_2 dans le système restreint, on construit la démonstration*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, B, C \vdash B, \Delta} \quad \dfrac{\pi_2}{\Gamma, B, C \vdash C, \Delta}}{\Gamma, B, C \vdash B \wedge C, \Delta} \wedge\text{-droite}}{\Gamma, B \wedge C \vdash B \wedge C, \Delta} \wedge\text{-gauche}$$

On procède de même dans les autres cas, en prenant soin, dans le cas où la proposition A est de la forme $\forall x\ B$, d'appliquer la règle $\forall$-droite plus bas que la règle $\forall$-gauche et, dans le cas où elle est de la forme $\exists x\ B$, la règle $\exists$-gauche plus bas que la règle $\exists$-droite.