# Logique Formelle & Programmation logique
# Feuille de TD n° 3 : Logique du 1er ordre

**Exercice 1 : Sémantique**

1. Les formules suivantes sont-elles satisfiables ? valides ? Justifiez.

$$\forall x, (p(x) \Rightarrow p(z))$$
$$(\forall x, r(x,y)) \Rightarrow r(x,x)$$
$$\forall x, (p(x) \Rightarrow \neg p(z))$$

2. Montrez que les formules ci-dessous ne sont pas conséquences logiques les unes des autres :

$$\forall x, p(x,x)$$
$$\forall x, \forall y, (p(x,y) \Rightarrow p(y,x))$$
$$\forall x, \forall y, \forall z, ((p(x,y) \land p(y,z)) \Rightarrow p(x,z))$$

   Que pouvez-vous dire d'un modèle validant les trois formules ?

**Exercice 2 : Skolémisation**
Considérons les signatures $\Sigma := \emptyset$ et $\Psi := \{r/2\}$ et la formule

$$A := \forall x, \exists y, r(x,y)$$

Considérons maintenant les signatures $\Sigma' := \{f/1\}$ et $\Psi' := \{r/2\}$ et la formule

$$B := \forall x, r(x, f(x))$$

1. Montrez que $A$ est satisfiable si et seulement si $B$ l'est.
2. Montrez que $A$ et $B$ ne sont pas sémantiquement équivalentes.

**Exercice 3 : Premières preuves en maths**
Montrez la prouvabilité dans G3 des formules valides de l'exercice 1, puis des formules ci-dessous :

$$\begin{array}{rl}
(\exists x, A) \Rightarrow ((\forall x, (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\exists x, B)) & \\
((\exists x, A) \lor B) \Leftrightarrow (\exists x, (A \lor B)) & \text{si } x \notin fv(B) \\
((\forall x, A) \land B) \Leftrightarrow (\forall x, (A \land B)) & \text{si } x \notin fv(B) \\
((\exists x, A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x, (A \Rightarrow B)) & \text{si } x \notin fv(B) \\
((\forall x, A) \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x, (A \Rightarrow B)) & \text{si } x \notin fv(B) \\
(A \Rightarrow (\forall x, B)) \Leftrightarrow (\forall x, (A \Rightarrow B)) & \text{si } x \notin fv(A) \\
(\neg(\forall x, A)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg A) &
\end{array}$$

Soit $A$ la formule $\forall x, \forall y, (p(x,y) \Rightarrow p(f(x), f(y)))$.
Construisez, en vous servant des règles du calcul des séquents G3 pour la logique du 1er ordre un arbre de preuve du séquent suivant :

$$\vdash A \Rightarrow \forall x', ((\forall y', p(x', y')) \Rightarrow p(f(x'), f(f(x'))))$$