Logique Formelle & Programmation logique
Feuille de TD n° 2 : Logique Propositionnelle et preuves

Exercice 1 : Multisets
Déterminez quels multisets, parmi ceux ci-dessous, sont égaux :

$$\{\!\{A, B, C, B, B, A\}\!\} \qquad \{\!\{B, B, C, B, C, A\}\!\} \qquad \{\!\{B, B, A, C, B, A\}\!\} \qquad \{\!\{C, B, A, C, B, B\}\!\}$$

Donnez pour chacun d'entre eux la fonction des formules vers les entiers≥ 0 qu'ils représentent.
Représentez avec des $\{\!\{\ \}\!\}$ le multiset

$$\begin{array}{ll} f: & A \mapsto 2 \\ & D \mapsto 1 \\ & C \mapsto 3 \\ & \text{et pour tout autre B,} \\ & B \mapsto 0 \end{array}$$

Pourquoi faut-il que le support des fonctions soit fini ?

Exercice 2 : Des preuves dans G3
Soit $A \Leftrightarrow B$ une abbréviation pour $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.
Montrez

$$\begin{array}{rr} \vdash_{G3} (\neg\neg A) \Leftrightarrow A & \vdash_{G3} A \vee \neg A \\ \vdash_{G3} (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B) & \vdash_{G3} (\neg(A \wedge B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B)) \\ \vdash_{G3} (\neg(A \vee B)) \Leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B)) & \vdash_{G3} (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \\ \vdash_{G3} (A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) & \vdash_{G3} (A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \end{array}$$

Exercice 3 : Propriétés des preuves de G3

1. Pour chaque règle de G3, comparez le nombre de connecteurs présents dans une premisse et le nombre de connecteurs présents dans la conclusion.
2. Sur la base de cette comparaison, que pouvez-vous dire sur la hauteur d'une dérivation d'un séquent $\Gamma \vdash \Delta$ (hauteur au sens : hauteur de l'arbre = longueur de la plus longue branche) ?
3. La prouvabilité de la logique propositionnelle classique (exprimée par G3) est-elle un problème décidable ?
   (i.e. existe-t-il un algorithme qui prenne en argument une formule et réponde s'il existe une preuve de celle-ci ?)

Exercice 4 : Correction et complétude de G3 vis-à-vis de la sémantique
Montrez que $A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$.
Vous le ferez par récurrence sur le nombre de connecteurs logiques dans $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$.
L'étape de récurrence revient à analyser si chaque règle d'inférence de G3 est elle-même correcte et complète,
i.e. si pour chaque instance de règle de G3

$$\frac{(A^1_1, \ldots, A^1_{n_1} \vdash B^1_1, \ldots, B^1_{m_1}) \qquad \ldots \qquad (A^i_1, \ldots, A^i_{n_i} \vdash B^i_1, \ldots, B^i_{m_i})}{A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m}$$

on a bien $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$ si et seulement si $A^j_1 \wedge \ldots \wedge A^j_{n_j} \models B^j_1 \vee \ldots \vee B^j_{m_j}$ (pour tout $1 \leq j \leq i$).