Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 5 :

Variables existentielles et Unification

Système G3 avec variables existentielles : 1ère tentative

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{?\mathbf{x}}/_{x}\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}\ ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{{}^{?\mathbf{x}}/_{x}\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}\ ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

On doit donc enrichir notre syntaxe de terms :

$$t ::= x \mid ?x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad \text{si } f/n \in \Sigma$$

$ev(t)$ et $ev(\Gamma)$ sont les équivalents de $fv(t)$ et $fv(\Gamma)$ pour les variables existentielles.

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(?y), (\exists y, r(y))}{r(986) \vdash \exists y, r(y)}$

On a envie de dire : j'ai gagné la branche en instanciant $?y$ par 986

Plus généralement, que faire lors d'un axiome ?

$$\dfrac{}{\Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

Ce serait bien d'instancier toutes les variables existentielles afin que, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on ait $t_i = u_i$.

Substitution : fonction partielle des variables existentielles vers les termes ($\sigma(?x) = t$), que l'on étend facilement aux termes ($\sigma(u) = t$) ainsi :

$$\begin{array}{lll}
\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) & = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) & \\
\sigma(x) & = x & \\
\sigma(?x) & = ?x & \text{si } ?x \notin \text{domaine}(\sigma)
\end{array}$$

Unificateur et Propagation

Formellement, on cherche donc une substitution σ tel que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$.

σ est une solution du problème d'**unification** $t_1 = u_1$,. . ., $t_n = u_n$

σ est un **unificateur**

Exemple : Soit $A = \forall x, p(x, x)$ and $B = \exists y, (p(y, 0) \wedge p(y, S(0)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma(?y) = \sigma(?x) = 0}{A, p(?x, ?x) \vdash p(?y, 0), B}}{A \vdash p(?y, 0), B} \quad \dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma'(?y) = \sigma'(?x') = S(0)}{A, p(?x', ?x') \vdash p(?y, S(0)), B}}{A \vdash p(?y, S(0)), B}}{A \vdash p(?y, 0) \wedge p(?y, S(0)), B}}{A \vdash B}$$

σ et σ' incompatibles : impossible de reconstruire de preuve dans G3.

Dès qu'on choisit l'un, il faut propager ce choix dans l'autre branche.

Système G3 avec variables existentielles : 2ème tentative

On regroupe l'état de toutes les branches ouvertes

$(\Gamma_1 \vdash \Delta_1) \ldots (\Gamma_n \vdash \Delta_n)$ dans une structure de données :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \;\wr\; \ldots \;\wr\; \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

$$\frac{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma \vdash P, \Delta}{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma, (\forall x, P), \{{}^{?\mathbf{x}}/_{x}\} P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}\; ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma \vdash \{{}^{?\mathbf{x}}/_{x}\} P, (\exists x, P), \Delta}{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}\; ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma, P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\sigma(\mathcal{S})}{\mathcal{S} \;\wr\; \Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$,
$\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$
pour une certaine substitution σ
qui instancie les variables existentielles

…et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta \quad \wr \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta \quad \wr \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta \quad \wr \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Unification

Revenons aux unificateurs.

Questions :

Existe-il toujours un unificateur au problème $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$?

Comment l'obtiens-je dans les cas non-triviaux ?

. . .**l'algorithme d'unification du 1er ordre**

Algorithme d'Unification (Robinson)

$$mgu(f(t_1,\ldots,t_n) = f(t'_1,\ldots,t'_n), E) \quad = mgu(t_1 = t'_1,\ldots,t_n = t'_n, E)$$

$$mgu(f(t_1,\ldots,t_n) = g(t'_1,\ldots,t'_m), E) \quad = \text{Fail}$$

$$mgu(t = t, E) \quad = mgu(E)$$

$$mgu(?x = t, E) \quad = (?x \mapsto \sigma(t)) \ \cup \ \sigma$$

où $\sigma = mgu(\{{}^{t}/_{?x}\} E)$

si $?x \notin ev(t)$

$$mgu(?x = t, E) \quad = \text{Fail}$$

sinon

$$mgu(t = ?x, E) \quad = mgu(?x = t, E)$$

si t n'est pas une variable existentielle

$$mgu() \quad = \emptyset$$

Est-ce fini ?

Exemple : Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x, \forall y, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_1, p(?z, ?z) \vdash (p(?x, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (p(?x, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (\forall y, p(?x, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

avec

$$\begin{aligned} mgu(?z = ?x, ?z = S(y)) : \quad & ?z \mapsto S(y) \\ & ?x \mapsto S(y) \end{aligned}$$

Le témoin pour x ne pouvait pas utiliser y, libéré plus tard !

L'astuce qui tue

Exemple : Soit $P_1 = \forall z, p(z, z)$ and $P_2 = \exists x, \forall y, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_1, p(?z, ?z) \vdash_{?x} (p(?x, S(y(?x)))), P_2}}{P_1 \vdash_{?x} (p(?x, S(y(?x)))), P_2}}{P_1 \vdash_{?x} (\forall y, p(?x, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

pas ok, car aucun unificateur pour $?z = ?x, ?z = S(y(?x))$

$(mgu(?z = ?x, ?z = S(y(?x))) =$ Fail)

Système G3 avec variables existentielles

Cette fois-ci c'est la bonne !

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi \left\{{}^{x(\Phi)}\!/_{x}\right\} P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi (\forall x, P), \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x, P), \left\{{}^{?\mathbf{x}}\!/_{x}\right\} P \vdash_{\Phi, ?\mathbf{x}} \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x, P) \vdash_\Phi \Delta}\; ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi, ?\mathbf{x}} \left\{{}^{?\mathbf{x}}\!/_{x}\right\} P, (\exists x, P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi (\exists x, P), \Delta}\; ?\mathbf{x} \notin ev(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, \left\{{}^{x(\Phi)}\!/_{x}\right\} P \vdash_\Phi \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x, P) \vdash_\Phi \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\sigma(\mathcal{S})}{\mathcal{S} \wr \Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash_\Phi p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}\; \sigma = mgu(t_1 = u_1, \ldots t_n = u_n)$$

Questions?