Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 4 :

Logique du 1er ordre : les bonnes questions à se poser

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Deux visions :

Premième vision : à la “Logique du premier ordre”

Les règles sont celles que j’ai présentées au cours 3 :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}\!/\!_{x}\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{{}^{t}\!/\!_{x}\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Le théorème du buveur $\vdash \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est prouvable.

Un petit point sur le buveur : variante

Deuxième vision : à la "Théorie des types"

on enregistre à quelles variables libres on a droit :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi,x} P, \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\forall x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \left\{{}^{t}\!/\!_{x}\right\} P \vdash^{\Phi} \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash^{\Phi} \Delta}\, fv(t) \subseteq \Phi$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi} \left\{{}^{t}\!/\!_{x}\right\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\exists x, P), \Delta}\, fv(t) \subseteq \Phi \qquad \frac{\Gamma, P \vdash^{\Phi,x} \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash^{\Phi} \Delta}$$

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable…

…sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

ainsi que $(\exists z, \top) \vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$

Les deux versions ne prouvent pas les mêmes théorèmes !

(…sauf si la signature possède une constante de terme)

Sémantique de la première version

La version “Logique du premier ordre” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$ non-vide
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Notez que si la signature possède une constante de terme c, les deux notions de modèles coïncident puisque $\tilde{c}$ force $\mathcal{U}$ à ne pas être vide

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non si la réponse est non

Procédure de semi-décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non ou ne s'arrêtera pas si la réponse est non

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon...

– On applique les règles de G3 en énumérant tous les témoins possibles jusqu'à trouver une preuve du théorème demandé Très bête.

Peut-on faire mieux ? example : $r(986) \vdash (\exists y, r(y))$

Variables existentielles

On retarde le choix des témoins jusqu'à avoir plus d'informations pour les choisir

Variables existentielles. . .

Questions?