Logique formelle &
Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 4 :

Logique du 1er ordre : les bonnes questions à se poser

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Deux visions :

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Deux visions :

Premième vision : à la “Logique du premier ordre”

Les règles sont celles que j’ai présentées au cours 3 :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}\!/\!_{x}\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{{}^{t}\!/\!_{x}\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Deux visions :

Premième vision : à la “Logique du premier ordre”

Les règles sont celles que j’ai présentées au cours 3 :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Le théorème du buveur $\vdash \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est prouvable.

Un petit point sur le buveur : et si le bar est vide ?

Si le bar est vide, le théorème est faux.

Deux visions :

Premième vision : à la “Logique du premier ordre”

Les règles sont celles que j’ai présentées au cours 3 :

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Le théorème du buveur $\vdash \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est prouvable.

Un petit point sur le buveur : variante

Deuxième vision : à la "Théorie des types"

on enregistre à quelles variables libres on a droit :

Un petit point sur le buveur : variante

Deuxième vision : à la “Théorie des types”

on enregistre à quelles variables libres on a droit :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi,x} P, \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\forall x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash^{\Phi} \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash^{\Phi} \Delta} fv(t) \subseteq \Phi$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi} \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\exists x, P), \Delta} fv(t) \subseteq \Phi \qquad \frac{\Gamma, P \vdash^{\Phi,x} \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash^{\Phi} \Delta}$$

Un petit point sur le buveur : variante

Deuxième vision : à la “Théorie des types”

on enregistre à quelles variables libres on a droit :

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi,x} P, \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\forall x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}/_{x}\} P \vdash^{\Phi} \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash^{\Phi} \Delta}\, fv(t) \subseteq \Phi$$

$$\frac{\Gamma \vdash^{\Phi} \{{}^{t}/_{x}\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash^{\Phi} (\exists x, P), \Delta}\, fv(t) \subseteq \Phi \qquad \frac{\Gamma, P \vdash^{\Phi,x} \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash^{\Phi} \Delta}$$

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable. . .

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable…

…sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable. . .

. . .sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable…

…sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

ainsi que $(\exists z, \top) \vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable...

...sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

ainsi que $(\exists z, \top) \vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$

Les deux versions ne prouvent pas les mêmes théorèmes !

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable...

...sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

ainsi que $(\exists z, \top) \vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$

Les deux versions ne prouvent pas les mêmes théorèmes !

(...sauf si la signature possède une constante de terme)

Un petit point sur le buveur : variante

Du coup, $\vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ n'est pas un séquent prouvable…

…sans constante de terme (=constructeur de terme d'arité 0)

par exemple ici : le barman ?

par contre, $\vdash^{z} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$ est dérivable !

ainsi que $(\exists z, \top) \vdash^{\emptyset} \exists x, (p(x) \Rightarrow \forall y, p(y))$

Les deux versions ne prouvent pas les mêmes théorèmes !

(…sauf si la signature possède une constante de terme)

Sémantique de la première version

La version “Logique du premier ordre” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

– un univers $\mathcal{U}$ non-vide

– une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$

– une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Sémantique de la première version

La version “Logique du premier ordre” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

– un univers $\mathcal{U}$ non-vide

– une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$

– une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Sémantique de la première version

La version “Logique du premier ordre” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$ non-vide
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Sémantique de la première version

La version “Logique du premier ordre” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$ non-vide
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Notez que si la signature possède une constante de terme c, les deux notions de modèles coïncident puisque $\tilde{c}$ force $\mathcal{U}$ à ne pas être vide

Sémantique de la première version

La version “Théorie des types” est correcte et complète vis-à-vis de la notion de modèle :

- un univers $\mathcal{U}$
- une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$
- une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Définition

$A \models B$ si tout modèle de A est un modèle de B

Théorème

$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$ ssi $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Notez que si la signature possède une constante de terme c, les deux notions de modèles coïncident puisque $\tilde{c}$ force $\mathcal{U}$ à ne pas être vide

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$ La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$ La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non si la réponse est non

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non si la réponse est non

Procédure de semi-décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non ou ne s'arrêtera pas si la réponse est non

Décidabilité

Contrairement au cas propositionnel,

application (bottom-up) de certaines règles ne font pas diminuer le nombre de connecteurs

$\Longrightarrow$La hauteur des preuves d'un théorème donné n'a pas de borne.

$\Longrightarrow$La prouvabilité est indécidable (Théorème de Church).

Procédure de décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non si la réponse est non

Procédure de semi-décision :

un algorithme qui, étant donné une instance d'un problème,

– s'arrêtera en répondant oui si la réponse est oui

– s'arrêtera en répondant non ou ne s'arrêtera pas si la réponse est non

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ?

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon...

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

  on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}/_{x}\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{{}^{t}/_{x}\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon. . .

– On applique les règles de G3 en énumérant tous les témoins possibles jusqu'à trouver une preuve du théorème demandé

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \left\{{}^{t}\!/\!_{x}\right\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \left\{{}^{t}\!/\!_{x}\right\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon. . .

– On applique les règles de G3 en énumérant tous les témoins possibles jusqu'à trouver une preuve du théorème demandé Très bête.

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,

on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}/_{x}\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{{}^{t}/_{x}\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon...

– On applique les règles de G3 en énumérant tous les témoins possibles jusqu'à trouver une preuve du théorème demandé Très bête.

Peut-on faire mieux ? example : $r(986) \vdash (\exists y, r(y))$

Algorithmes de semi-décision pour la prouvabilité

– on énumère tous les arbres décorés par des séquents,
on vérifie pour chacun s'il s'agit d'une preuve du théorème demandé

Très très bête.

Peut-on faire plus intelligent ? de toute façon, les règles

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

nécessitent de sortir t du chapeau. Il semble nécessaire d'énumérer tous les t jusqu'à ce qu'on trouve le bon...

– On applique les règles de G3 en énumérant tous les témoins possibles jusqu'à trouver une preuve du théorème demandé Très bête.
Peut-on faire mieux ? example : $r(986) \vdash (\exists y, r(y))$

Variables existentielles

On retarde le choix des témoins jusqu'à avoir plus d'informations pour les choisir

Variables existentielles

On retarde le choix des témoins jusqu'à avoir plus d'informations pour les choisir Variables existentielles. . .

Variables existentielles

On retarde le choix des témoins jusqu'à avoir plus d'informations pour les choisir

Variables existentielles. . .

Questions?