Logique formelle &
Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 3 :

Logique du 1er ordre

Pour faire rapide

On rajoute les quantificateurs $\exists x, P$ et $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un univers de discours, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des termes

Exemples d'univers de discours :	Exemples de termes
– les entiers	$0, S(0), 3+4$
– les réels	$3/4, \pi$
– les ensembles	$\emptyset, A \cup B$

Syntaxe : termes

Formellement, on se donne une signature Σ de termes :

ensemble de constructeurs de termes avec, pour chacun, une arité

Exemple : $\Sigma = \{$“0” / 0, “S” / 1, “$+$” /2 $\}$

Comme annoncé, on se donne aussi des variables de termes x, y, z

La syntaxe des termes est alors donnée par :

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad \text{si } f/n \in \Sigma$$

Syntaxe : propositions

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple : $1 + 1 = 2$ $\qquad 3 \leq 4 \qquad x \in y \qquad x \subseteq y$

On se donne donc une signature Ψ de propositions :

ensemble de propositions atomiques avec, pour chacune, une arité

Exemple : $\Psi = \{$"$=$" / 2, "$\leq$" / 2, "IsEven" /1 $\}$

La syntaxe des propositions est alors donnée par :

$$P ::= p(t_1, \ldots, t_n) \mid \ldots \text{[comme en logique prop.]} \ldots \mid (\exists x, P) \mid (\forall x, P)$$

si $p/n \in \Psi$

Syntaxe : propositions

On bazarde les variables propositionnelles !

Elle servaient à ce que les propositions atomiques ne soient pas interprétées de manière constante (que chacune, selon l'interprétation, soit parfois vraie parfois fausse)

Ici, les termes donnés comme arguments des prop. atomiques vont créer cette variation.

Syntaxe : variables liées/muettes 1

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que $\forall x, P(x)$ c’est la même chose que $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

Plus complexe qu’il n’y parait.

Tâche 1 : définir quelles sont, dans P les variables muettes (=liées)

Celles qui n’y sont pas libres ! (on est bien avancé)

Syntaxe : variables liées/muettes 2

Toute variable (de terme) apparaissant dans t est libre dans t, elles forment l'ensemble $fv(t)$

fv est défini inductivement sur les propositions :

$$
\begin{array}{ll}
fv(p(t_1, \ldots, t_n)) & := fv(t_1) \cup \ldots \cup fv(t_n) \\
fv(A \wedge B) & := fv(A) \cup fv(B) \\
\ldots & \\
fv(\exists x, P) & := fv(P) \backslash \{x\} \\
fv(\forall x, P) & := fv(P) \backslash \{x\}
\end{array}
$$

Syntaxe : variables liées/muettes 3

Tâche 2 : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette

appelé α-conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur P (resp. t)

$(xy)P$ (resp. $(xy)t$) :

partout où vous avez écrit x (lié ou libre), vous mettez y, et vice versa

$\exists x, P$ est identifié avec $\exists y, (xy)P$ si $y \notin fv(P)$

$\forall x, P$ est identifié avec $\forall y, (xy)P$ si $y \notin fv(P)$

Pourquoi "si $y \notin fv(P)$" (i.e. y est une variable fraiche) ?

$(y = 0) \wedge (\exists x, x = y)$ n'est pas la même chose que

$(y = 0) \wedge \exists y, y = x$

Syntaxe : variables substituées

Tâche 3 : définir une notion de substitution (variable x par terme t)

sur les termes : $\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\, t'$

trivial.

sur les propositions : $\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\, P$

ATTENTION quand vous définissez $\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\,(\forall y, P)$ et $\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\,(\exists y, P)$! ! !

Que se passe-t-il si $x = y$?

si $y \in fv(t)$?

Moralité :

$\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\,(\forall y, P) := \forall y, \{{}^{t}\!/\!_{x}\}\, P$ et $\{{}^{t}\!/\!_{x}\}\,(\exists y, P) = \exists y, \{{}^{t}\!/\!_{x}\}\, P$

si $x \neq y$ et $y \notin fv(t)$

sinon, renommer y en l'échangeant avec variable fraiche z : $(yz)P$

Sémantique : termes

Il nous faut :

- un univers (sémantique) $\mathcal{U}$ pour interpréter les termes
- une interprétation $\tilde{f}$ de tous les constructeurs de termes f, à savoir si f est d'arité n, une fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{U}^n$ dans $\mathcal{U}$

Sémantique d'un terme t : par récurrence sur t

et si t est une variable x ?

Interprétation $[t]_I$ d'un terme t est parametrée par valuation qui interprète les variables vers $\mathcal{U}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} [x]_I &:= I(x) \\ [f(t_1, \ldots, t_n)]_I &:= \tilde{f}([t_1]_I, \ldots, [t_n]_I) \end{aligned}$$

Sémantique : propositions

Il nous faut :

– une interprétation $\tilde{p}$ de toutes les propositions atomiques p, à savoir si p est d'arité n, une fonction $\tilde{p}$ de $\mathcal{U}^n$ vers $\mathcal{B}$

Sémantique d'une proposition P : par récurrence sur P

dépend toujours de l'interprétation I des variable libres de P

$$\begin{array}{ll}
[p(t_1, \ldots, t_n)]_I & := \tilde{p}([t_1]_I, \ldots, [t_n]_I) \\
[A \wedge B]_I & := f_\wedge([A]_I, [B]_I) \\
\ldots & \\
[\forall x, P]_I & := min\{[P]_{I,x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\} \\
[\exists x, P]_I & := max\{[P]_{I,x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\}
\end{array}$$

Modèles & co.

Un modèle d'une proposition P est maintenant :

– un univers $\mathcal{U}$ non-vide

– une interprétation $\tilde{f}$ pour chaque $f \in \Sigma$ et $\tilde{p}$ pour chaque $p \in \Psi$

– une interprétation $I(x) \in \mathcal{U}$ pour chaque variable $x \in fv(P)$

tels que $[P]_I = T$

Dans le cas particulier où $fv(P) = \emptyset$ (on dit que P est clos),

cela ne dépend que de l'univers $\mathcal{U}$ et de l'interprétation $\tilde{}$

Rebelotte

Définitions :

- A est satisfiable s'il a un modèle
- A est valide, noté $\models A$, si toutes les structures ci-dessus en sont des modèles
- B est une conséquence sémantique de A (noté $A \models B$) si tout modèle de A est aussi un modèle de B
- A et B sont sémantiquement équivalents, noté $A \equiv B$, si $A \models B$ et $B \models A$

Théorème : A est satisfiable (resp. valide) si et seulement si $\neg A$ n'est pas valide (resp. satisfiable)

Système de preuve ! G3 version logique du 1er ordre

Même règles qu'en propositionnel, plus

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x, P), \{{}^{t}\!/_{x}\}P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{{}^{t}\!/_{x}\}P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

A nouveau : Dualité de De Morgan entre $\forall$ et $\exists$

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Démonstration :

– du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation

– du bas vers le haut : difficile pour ce cours
Il faut construire un modèle, avec un $\mathcal{U}$ et un $\tilde{}$! ! !

A partir de quoi ? la syntaxe elle-même. . .

Questions?