Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 2 :

Logique propositionnelle —

La notion de démonstration

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

A quoi bon ? La constatation sémantique n'est-elle pas suffisante ?

…après tout, si on peut "voir" si une proposition est vraie ou pas…

Aha ! tant qu'on parle de choses finies (par ex : logique propositionnelle)…

…à la rigueur…

Mais quand l'univers du discours est infini, comment constater des propriétés universelles ? (c.f. logique des prédicats (= du 1er ordre))

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Ensembles : ordre n'importe pas, répétitions n'importent pas

$$\{A, B\} = \{B, A\} \qquad \{A, A\} = A$$

Multisets : ordre n'importe pas, répétitions importent

$$\{\!\{A, B\}\!\} = \{\!\{B, A\}\!\} \qquad \{\!\{A, A\}\!\} \neq A$$

Formellement : une fonction f des formules vers les entiers ≥ 0 à support fini (support = les formules A telles que $f(A) > 0$)

$f(A)$ étant le nombre d'occurrences de A dans le multiset

Le calcul des séquents

Une paire de multisets de formules $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est appelé séquent (on lache les $\{\!\{\ \}\!\}$ des multisets)

Ce n'est qu'une construction syntaxique, mais le sens intuitif d'un tel séquent est $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Une dérivation (=preuve=démonstration) est un arbre

– dont les noeuds sont étiquetés par des séquents, par exemple :

$$\dfrac{\vdash a \qquad \dfrac{\vdash b}{\vdash b \vee c}}{\vdash a \wedge (b \vee c)}$$

– dont l'étiquetage suit des règles dites d'inférence, par exemple :

$$\dfrac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B} \qquad \begin{array}{l}\text{premisses}\\ \text{conclusion}\end{array}$$

Le calcul des séquents

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est dérivable dans un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence s'il existe une dérivation dont il est la conclusion (i.e. dont il décore la racine).

On le note $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$

L'idée est maintenant de trouver un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence caractérisant la conséquence sémantique

(i.e. tel que $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$)

Schémas et instances

Schéma :

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B}$$

où A, B dénotent des formules arbitraires

Instances (exemples) :

$$\frac{\vdash c \qquad \vdash c'}{\vdash c \wedge c'} \qquad \frac{\vdash \neg c \qquad \vdash \neg c'}{\vdash \neg c \wedge \neg c'} \qquad \ldots$$

pour les variables propositionnelles particulières c et c'

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$

Système G3 : les règles d'inférence

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Correspond à l'idée que $A \Rightarrow B$ est la même chose que $(\neg A) \vee B$

(écrivez les règles et vous verrez...)

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Démonstration : D'habitude,

du haut vers le bas : par récurrence sur la hauteur de l'arbre de preuve

du bas vers le haut : beaucoup de façons

Souvenez-vous : la récurrence (aussi appelée induction) est au raisonnement ce que la récursion est au calcul / à la programmation.

Questions?