Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 2 :

Logique propositionnelle —

La notion de démonstration

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

A quoi bon ? La constatation sémantique n'est-elle pas suffisante ?

…après tout, si on peut “voir” si une proposition est vraie ou pas…

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

A quoi bon ? La constatation sémantique n'est-elle pas suffisante ?

. . .après tout, si on peut “voir” si une proposition est vraie ou pas. . .

Aha ! tant qu'on parle de choses finies (par ex : logique propositionnelle). . .

. . .à la rigueur. . .

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

A quoi bon ? La constatation sémantique n'est-elle pas suffisante ?

...après tout, si on peut "voir" si une proposition est vraie ou pas...

Aha ! tant qu'on parle de choses finies (par ex : logique propositionnelle)...

...à la rigueur...

Mais quand l'univers du discours est infini, comment constater des propriétés universelles ? (c.f. logique des prédicats (= du 1er ordre))

Notion de preuve

Rappelez-vous : on cherche à caractériser de manière syntaxique les notions de **conséquence sémantique** et de **validité**

On avait des notion sémantiques $A \models B$ et $\models B$

basées sur la constatation

(passant par valeurs de vérité & interprétation sémantique des formules)

On cherche maintenant des notions syntaxiques $A \vdash B$ et $\vdash B$

basées sur la démonstration (=preuve)

A quoi bon ? La constatation sémantique n'est-elle pas suffisante ?

…après tout, si on peut "voir" si une proposition est vraie ou pas…

Aha ! tant qu'on parle de choses finies (par ex : logique propositionnelle)…

…à la rigueur…

Mais quand l'univers du discours est infini, comment constater des propriétés universelles ? (c.f. logique des prédicats (= du 1er ordre))

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Ensembles : ordre n'importe pas, répétitions n'importent pas

$$\{A, B\} = \{B, A\} \qquad \{A, A\} = A$$

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Ensembles : ordre n'importe pas, répétitions n'importent pas

$$\{A, B\} = \{B, A\} \qquad \{A, A\} = A$$

Multisets : ordre n'importe pas, répétitions importent

$$\{\!\{A, B\}\!\} = \{\!\{B, A\}\!\} \qquad \{\!\{A, A\}\!\} \neq A$$

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Ensembles : ordre n'importe pas, répétitions n'importent pas

$$\{A, B\} = \{B, A\} \qquad \{A, A\} = A$$

Multisets : ordre n'importe pas, répétitions importent

$$\{\!\{A, B\}\!\} = \{\!\{B, A\}\!\} \qquad \{\!\{A, A\}\!\} \neq A$$

Formellement : une fonction f des formules vers les entiers ≥ 0 à support fini (support = les formules A telles que $f(A) > 0$)

$f(A)$ étant le nombre d'occurrences de A dans le multiset

Le calcul des séquents

Un séquent est une paire de multisets de formules.

C'est quoi un multiset de formules (que l'on notera $\Gamma, \Delta, \ldots$) ?
Listes : ordre importe, répétitions importent

$$A, B \neq B, A \qquad A, A \neq A$$

Ensembles : ordre n'importe pas, répétitions n'importent pas

$$\{A, B\} = \{B, A\} \qquad \{A, A\} = A$$

Multisets : ordre n'importe pas, répétitions importent

$$\{\!\{A, B\}\!\} = \{\!\{B, A\}\!\} \qquad \{\!\{A, A\}\!\} \neq A$$

Formellement : une fonction f des formules vers les entiers ≥ 0 à support fini (support = les formules A telles que $f(A) > 0$)

$f(A)$ étant le nombre d'occurrences de A dans le multiset

Le calcul des séquents

Une paire de multisets de formules $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est appelé séquent (on lache les $\{\!\{\ \}\!\}$ des multisets)

Le calcul des séquents

Une paire de multisets de formules $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est appelé séquent (on lache les $\{\!\{ \;\}\!\}$ des multisets)

Ce n'est qu'une construction syntaxique, mais le sens intuitif d'un tel séquent est $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Le calcul des séquents

Une paire de multisets de formules $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est appelé séquent (on lache les $\{\!\{\ \}\!\}$ des multisets)

Ce n'est qu'une construction syntaxique, mais le sens intuitif d'un tel séquent est $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Une dérivation (=preuve=démonstration) est un arbre

– dont les noeuds sont étiquetés par des séquents, par exemple :

$$\dfrac{\vdash a \qquad \dfrac{\vdash b}{\vdash b \vee c}}{\vdash a \wedge (b \vee c)}$$

– dont l'étiquetage suit des règles dites d'inférence, par exemple :

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B} \qquad \begin{array}{l} \text{premisses} \\ \text{conclusion} \end{array}$$

Le calcul des séquents

Une paire de multisets de formules $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est appelé séquent (on lache les $\{\!\{\ \}\!\}$ des multisets)

Ce n'est qu'une construction syntaxique, mais le sens intuitif d'un tel séquent est $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$

Une dérivation (=preuve=démonstration) est un arbre

– dont les noeuds sont étiquetés par des séquents, par exemple :

$$\dfrac{\vdash a \qquad \dfrac{\vdash b}{\vdash b \vee c}}{\vdash a \wedge (b \vee c)}$$

– dont l'étiquetage suit des règles dites d'inférence, par exemple :

$$\dfrac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B} \qquad \begin{array}{l}\text{premisses}\\ \text{conclusion}\end{array}$$

Le calcul des séquents

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est dérivable dans un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence s'il existe une dérivation dont il est la conclusion (i.e. dont il décore la racine).

On le note $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$

Le calcul des séquents

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est dérivable dans un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence s'il existe une dérivation dont il est la conclusion (i.e. dont il décore la racine).

On le note $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$

L'idée est maintenant de trouver un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence caractérisant la conséquence sémantique

(i.e. tel que $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$)

Le calcul des séquents

Un séquent $A_1, \ldots, A_n \vdash B_1, \ldots, B_m$ est dérivable dans un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence s'il existe une dérivation dont il est la conclusion (i.e. dont il décore la racine).

On le note $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$

L'idée est maintenant de trouver un système $\mathcal{S}$ de règles d'inférence caractérisant la conséquence sémantique

(i.e. tel que $A_1, \ldots, A_n \vdash_{\mathcal{S}} B_1, \ldots, B_m$ si et seulement si $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$)

Schémas et instances

Schéma :

$$\frac{\vdash A \qquad \vdash B}{\vdash A \wedge B}$$

où A, B dénotent des formules arbitraires

Instances (exemples) :

$$\frac{\vdash c \qquad \vdash c'}{\vdash c \wedge c'} \qquad \frac{\vdash \neg c \qquad \vdash \neg c'}{\vdash \neg c \wedge \neg c'} \qquad \cdots$$

pour les variables propositionnelles particulières c et c'

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		
$\bot$		
$\neg$		
$\vee$		
$\wedge$		

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\overline{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\overline{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$		
$\neg$		
$\vee$		
$\wedge$		

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\overline{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\overline{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\overline{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$		
$\vee$		
$\wedge$		

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$		
$\wedge$		

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$		

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$

Système G3 : les règles d'inférence

Règle de base (axiome) : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$$

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top$		$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\bot$	$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}$	
$\neg$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$

Système G3 : les règles d'inférence

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Système G3 : les règles d'inférence

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Correspond à l'idée que $A \Rightarrow B$ est la même chose que $(\neg A) \vee B$

(écrivez les règles et vous verrez...)

Système G3 : les règles d'inférence

Connecteur	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Correspond à l'idée que $A \Rightarrow B$ est la même chose que $(\neg A) \vee B$

(écrivez les règles et vous verrez...)

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Démonstration : D'habitude,

du haut vers le bas : par récurrence sur la hauteur de l'arbre de preuve

du bas vers le haut : beaucoup de façons

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Démonstration : D'habitude,

du haut vers le bas : par récurrence sur la hauteur de l'arbre de preuve

du bas vers le haut : beaucoup de façons

Souvenez-vous : la récurrence (aussi appelée induction) est au raisonnement ce que la récursion est au calcul / à la programmation.

G3 : Correction et complétude

Théorème

$$A_1, \ldots, A_n \vdash_{G3} B_1, \ldots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \models B_1 \vee \ldots \vee B_m$$

Démonstration : D'habitude,

du haut vers le bas : par récurrence sur la hauteur de l'arbre de preuve

du bas vers le haut : beaucoup de façons

Souvenez-vous : la récurrence (aussi appelée induction) est au raisonnement ce que la récursion est au calcul / à la programmation.

Questions?