

# Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

`Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

**Cours 0 :**  
**Motivation, Introduction**

## Introduction au cours

---

*Présentations*

## Introduction au cours

---

***Présentations***

***Pourquoi ce cours vous intéresse :***

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...  
...en Info, Electronique et Automatique

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

#### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...  
...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

#### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...  
...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs  
parce que vous êtes humains !

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

#### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...  
...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs  
parce que vous êtes humains !  
parce que d'autres en ont fait avant vous !

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

#### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...
  - ...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs
  - parce que vous êtes humains !
  - parce que d'autres en ont fait avant vous !
- Certains bugs coûtent plus que d'autres

## Introduction au cours

---

### *Présentations*

#### *Pourquoi ce cours vous intéresse :*

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...
  - ...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs
  - parce que vous êtes humains !
  - parce que d'autres en ont fait avant vous !
- Certains bugs coûtent plus que d'autres
  - Crash d'Ariane 5, 04/06/1996 : 500 millions d'euros
  - Bug du Pentium P5, 1995 : 475 millions de dollars

## Introduction au cours

---

### ***Présentations***

#### ***Pourquoi ce cours vous intéresse :***

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...
  - ...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs
  - parce que vous êtes humains !
  - parce que d'autres en ont fait avant vous !
- Certains bugs coûtent plus que d'autres
  - Crash d'Ariane 5, 04/06/1996 : 500 millions d'euros
  - Bug du Pentium P5, 1995 : 475 millions de dollars

**Oui mais pourquoi la logique ?**

---

## Oui mais pourquoi la logique ?

---

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité  $\Leftarrow$  Rigueur  $\Leftarrow$  Logique

## Oui mais pourquoi la logique ?

---

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité  $\Leftarrow$  Rigueur  $\Leftarrow$  Logique
- Science pour la fiabilité des systèmes :  
Logique a produit des **outils** pour l'assurance de la qualité

### Méthodes formelles

## Oui mais pourquoi la logique ?

---

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité  $\Leftarrow$  Rigueur  $\Leftarrow$  Logique
- Science pour la fiabilité des systèmes :  
Logique a produit des **outils** pour l'assurance de la qualité

### Méthodes formelles

...à base de mathématiques

## Oui mais pourquoi la logique ?

---

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité  $\Leftarrow$  Rigueur  $\Leftarrow$  Logique
- Science pour la fiabilité des systèmes :  
Logique a produit des **outils** pour l'assurance de la qualité

### Méthodes formelles

...à base de mathématiques

- Intelligence Artificielle

## Oui mais pourquoi la logique ?

---

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité  $\Leftarrow$  Rigueur  $\Leftarrow$  Logique
- Science pour la fiabilité des systèmes :  
Logique a produit des **outils** pour l'assurance de la qualité

### Méthodes formelles

...à base de mathématiques

- Intelligence Artificielle

**Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

– quand des vies humaines sont en jeu

(cf systèmes embarqués, pilotes automatiques, ligne 14-Meteor)

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

– quand des vies humaines sont en jeu

(cf systèmes embarqués, pilotes automatiques, ligne 14-Meteor)

– quand beaucoup d'argent est en jeu

(cf Ariane, transactions financières)

## Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

– quand des vies humaines sont en jeu

(cf systèmes embarqués, pilotes automatiques, ligne 14-Meteor)

– quand beaucoup d'argent est en jeu

(cf Ariane, transactions financières)

– quand les informations sont confidentielles

(eg correction de protocole cryptographique)

## **Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?**

---

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

– quand des vies humaines sont en jeu

(cf systèmes embarqués, pilotes automatiques, ligne 14-Meteor)

– quand beaucoup d'argent est en jeu

(cf Ariane, transactions financières)

– quand les informations sont confidentielles

(eg correction de protocole cryptographique)

## Sur ce cours

---

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

## Sur ce cours

---

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

Contrôle : Droit aux documents. Pas aux livres.

## Sur ce cours

---

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

Contrôle : Droit aux documents. Pas aux livres.

Pas plus facile, prend du temps, de l'écoute

Venir me voir = votre responsabilité

M'interrompre = votre responsabilité

## Sur ce cours

---

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

Contrôle : Droit aux documents. Pas aux livres.

Pas plus facile, prend du temps, de l'écoute

Venir me voir = votre responsabilité

M'interrompre = votre responsabilité

Contact : `Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

Page web :

`http://www.lix.polytechnique.fr/~lengrand/`

## Sur ce cours

---

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

Contrôle : Droit aux documents. Pas aux livres.

Pas plus facile, prend du temps, de l'écoute

Venir me voir = votre responsabilité

M'interrompre = votre responsabilité

Contact : `Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

Page web :

`http://www.lix.polytechnique.fr/~lengrand/`

## **Sur ce cours, suite**

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

## Sur ce cours, suite

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

## Sur ce cours, suite

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

- *Logique pour l'informatique : introduction à la déduction automatique*,  
Serenella Cerrito (Ed. Vuibert) (23,75 eur -Amazon)

## Sur ce cours, suite

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

- *Logique pour l'informatique : introduction à la déduction automatique*,  
Serenella Cerrito (Ed. Vuibert) (23,75 eur -Amazon)
- *Logique mathématique, tome 1 & 2*,  
René Cori et Daniel Lascar (Ed. Dunod) (38,95 eur)
- *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration*,  
Karim Nour, René David et Christophe Raffalli (Ed. Dunod) (30,88 eur)
- *Proof Theory and Automated Deduction*, Jean Goubault-Larrecq et Ian  
Mackie (Kluwer Academic Publisher) (48,57 eur)

## Sur ce cours, suite

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

- *Logique pour l'informatique : introduction à la déduction automatique*,  
Serenella Cerrito (Ed. Vuibert) (23,75 eur -Amazon)
- *Logique mathématique, tome 1 & 2*,  
René Cori et Daniel Lascar (Ed. Dunod) (38,95 eur)
- *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration*,  
Karim Nour, René David et Christophe Raffalli (Ed. Dunod) (30,88 eur)
- *Proof Theory and Automated Deduction*, Jean Goubault-Larrecq et Ian  
Mackie (Kluwer Academic Publisher) (48,57 eur)
- ce qu'il y a de disponible dans la bibliothèque locale

## Sur ce cours, suite

---

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

- *Logique pour l'informatique : introduction à la déduction automatique*,  
Serenella Cerrito (Ed. Vuibert) (23,75 eur -Amazon)
- *Logique mathématique, tome 1 & 2*,  
René Cori et Daniel Lascar (Ed. Dunod) (38,95 eur)
- *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration*,  
Karim Nour, René David et Christophe Raffalli (Ed. Dunod) (30,88 eur)
- *Proof Theory and Automated Deduction*, Jean Goubault-Larrecq et Ian  
Mackie (Kluwer Academic Publisher) (48,57 eur)
- ce qu'il y a de disponible dans la bibliothèque locale

## La logique, ça vient d'où ?

---

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

XIX<sup>ème</sup> siècle, crise logique. Les mathématiques : quoi, comment ?

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

XIX<sup>ème</sup> siècle, crise logique. Les mathématiques : quoi, comment ?

- quelle est la théorie universelle qui unifie les mathématiques ?
- comment raisonne-t-on pour tirer des conclusions de cette théorie ?

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

XIX<sup>ème</sup> siècle, crise logique. Les mathématiques : quoi, comment ?

- quelle est la théorie universelle qui unifie les mathématiques ?
- comment raisonne-t-on pour tirer des conclusions de cette théorie ?
  
- Axiomes
- Démonstration

## La logique, ça vient d'où ?

---

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

XIX<sup>ème</sup> siècle, crise logique. Les mathématiques : quoi, comment ?

- quelle est la théorie universelle qui unifie les mathématiques ?
- comment raisonne-t-on pour tirer des conclusions de cette théorie ?
  
- Axiomes
- Démonstration

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

Boole (1815-1864) :

Frege (1848-1925) :

Hilbert (1862-1943) :

Zermelo (1871-1953) :

Russell (1872-1970) :

Brouwer (1881-1966) :

Goedel (1906-1978) :

Church (1903-1995) :

Gentzen (1909-1945) :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

Boole (1815-1864) : algèbres de Boole, booléens, . . .ça vous dit qq chose ?

Frege (1848-1925) :

Hilbert (1862-1943) :

Zermelo (1871-1953) :

Russell (1872-1970) :

Brouwer (1881-1966) :

Goedel (1906-1978) :

Church (1903-1995) :

Gentzen (1909-1945) :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

Boole (1815-1864) : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

Frege (1848-1925) :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

Hilbert (1862-1943) :

Zermelo (1871-1953) : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

Russell (1872-1970) :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

Brouwer (1881-1966) :

Goedel (1906-1978) :

Church (1903-1995) :

Gentzen (1909-1945) :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

Boole (1815-1864) : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

Frege (1848-1925) :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

Hilbert (1862-1943) : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

Zermelo (1871-1953) : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

Russell (1872-1970) :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

Brouwer (1881-1966) :

Goedel (1906-1978) :

Church (1903-1995) :

Gentzen (1909-1945) :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

Boole (1815-1864) : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

Frege (1848-1925) :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

Hilbert (1862-1943) : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

Zermelo (1871-1953) : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

Russell (1872-1970) :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

Brouwer (1881-1966) : constructivisme

Goedel (1906-1978) :

Church (1903-1995) :

Gentzen (1909-1945) :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

**Boole (1815-1864)** : algèbres de Boole, booléens, . . .ça vous dit qq chose ?

**Frege (1848-1925)** :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

**Hilbert (1862-1943)** : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

**Zermelo (1871-1953)** : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

**Russell (1872-1970)** :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

**Brouwer (1881-1966)** : constructivisme

**Goedel (1906-1978)** : théorèmes d'incomplétude

**Church (1903-1995)** :

**Gentzen (1909-1945)** :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

**Boole (1815-1864)** : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

**Frege (1848-1925)** :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

**Hilbert (1862-1943)** : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

**Zermelo (1871-1953)** : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

**Russell (1872-1970)** :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

**Brouwer (1881-1966)** : constructivisme

**Goedel (1906-1978)** : théorèmes d'incomplétude

**Church (1903-1995)** : fonctions et calcul, théorèmes d'indécidabilité. . .

**Gentzen (1909-1945)** :

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

**Boole (1815-1864)** : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

**Frege (1848-1925)** :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

**Hilbert (1862-1943)** : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

**Zermelo (1871-1953)** : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

**Russell (1872-1970)** :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

**Brouwer (1881-1966)** : constructivisme

**Goedel (1906-1978)** : théorèmes d'incomplétude

**Church (1903-1995)** : fonctions et calcul, théorèmes d'indécidabilité. . .

**Gentzen (1909-1945)** : théorèmes de cohérence et formalismes logiques

## Grossièrement, quelques noms et contributions

---

**Boole (1815-1864)** : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

**Frege (1848-1925)** :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

**Hilbert (1862-1943)** : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

**Zermelo (1871-1953)** : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

**Russell (1872-1970)** :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

**Brouwer (1881-1966)** : constructivisme

**Goedel (1906-1978)** : théorèmes d'incomplétude

**Church (1903-1995)** : fonctions et calcul, théorèmes d'indécidabilité. . .

**Gentzen (1909-1945)** : théorèmes de cohérence et formalismes logiques

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

⇒ **Meta-mathématiques**

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

⇒ **Meta-mathématiques**

Grande avancée : **vérité** ⇒ **prouvabilité**

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

⇒ **Meta-mathématiques**

Grande avancée : **vérité** ⇒ **prouvabilité**

Une proposition  $P$  est-elle vraie ?



Une proposition  $P$  est-elle prouvable ?

## Méta-mathématiques

---

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

⇒ **Meta-mathématiques**

Grande avancée : **vérité** ⇒ **prouvabilité**

Une proposition  $P$  est-elle vraie ?



Une proposition  $P$  est-elle prouvable ?

## Questions meta-mathématiques

---

## Questions meta-mathématiques

---

- Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

## Questions meta-mathématiques

---

- Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?
  
- Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

## Questions meta-mathématiques

---

- Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?
- Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?
- Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

## Questions meta-mathématiques

---

– Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

– Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

– Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

## Questions meta-mathématiques

---

- Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

- Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

**Toujours pas d'accord**. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, . . .le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, . . .)

- Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

## Questions meta-mathématiques

---

- Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

- Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

**Toujours pas d'accord**. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, . . .le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, . . .)

- Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

**Théorie des ensembles**, Zermelo-Fraenkel : 9 “axiomes” (ou schémas)

## Questions meta-mathématiques

---

– Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

– Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

**Toujours pas d'accord**. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, ... le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, ...)

– Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

**Théorie des ensembles**, Zermelo-Fraenkel : 9 "axiomes" (ou schémas)

Frege : pour chaque propriété  $P$ , autorise la construction  $\{x \mid P(x)\}$

## Questions meta-mathématiques

---

– Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

– Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

**Toujours pas d'accord**. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, ... le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, ...)

– Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

**Théorie des ensembles**, Zermelo-Fraenkel : 9 "axiomes" (ou schémas)

Frege : pour chaque propriété  $P$ , autorise la construction  $\{x \mid P(x)\}$

Paradoxe :

*Soit  $F = \{x \mid x \notin x\}$ . Est-ce que  $F \in F$  ou est-ce que  $F \notin F$  ?...*

## Questions meta-mathématiques

---

– Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

**OUI** : langage des prédicats = langage du 1er ordre

– Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

**Toujours pas d'accord**. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, ... le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, ...)

– Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

**Théorie des ensembles**, Zermelo-Fraenkel : 9 "axiomes" (ou schémas)

Frege : pour chaque propriété  $P$ , autorise la construction  $\{x \mid P(x)\}$

Paradoxe :

*Soit  $F = \{x \mid x \notin x\}$ . Est-ce que  $F \in F$  ou est-ce que  $F \notin F$  ?...*

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$  ? (in)complétude1

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$  ? (in)complétude1
  
- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas ? (in)complétude2

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$  ? (in)complétude1
  
- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas ? (in)complétude2
  
- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon ? (in)décidabilité

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$ ? (in)complétude1  
**NON** (Goedel)
- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas? (in)complétude2
- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon? (in)décidabilité

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$ ? (in)complétude1

**NON** (Goedel)

- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas? (in)complétude2

**NON** (Goedel)

- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon? (in)décidabilité

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$ ? (in)complétude1

**NON** (Goedel)

- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas? (in)complétude2

**NON** (Goedel)

- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon? (in)décidabilité

**NON** (Church, Turing)

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$ ? (in)complétude1

**NON** (Goedel)

- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas? (in)complétude2

**NON** (Goedel)

- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon? (in)décidabilité

**NON** (Church, Turing)

Ces trois réponses datent des années 30.

## Questions meta-mathématiques, suite

---

- Etant donné une proposition  $P$ , existe-t-il toujours soit une preuve de  $P$  soit une preuve de  $\neg P$ ? (in)complétude1

**NON** (Goedel)

- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas? (in)complétude2

**NON** (Goedel)

- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de  $P$ , qui réponde NON sinon? (in)décidabilité

**NON** (Church, Turing)

Ces trois réponses datent des années 30.

**Questions?**