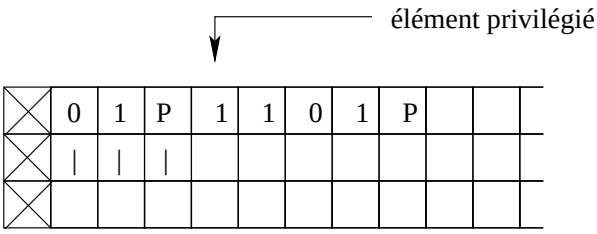
Logique et calculabilité - PC7

Exercice 1

Numéroter les arbres est une bonne idée quand on s'intéresse à l'existence des algorithmes, mais non quand on s'intéresse à leur complexité, car ces opérations de codage perturbent cette complexité. On considère donc, dans cet exercice, des machines de Turing qui calculent directement avec des arbres. Pour cela, on considère un ensemble de symboles Σ, qui contient, outre le symbole blanc et la croix, un nombre arbitraire d'autres symboles. On peut alors représenter un arbre, appartenant à un ensemble articulé, en notation préfixe ou postfixe sur une bande d'une machine de Turing.

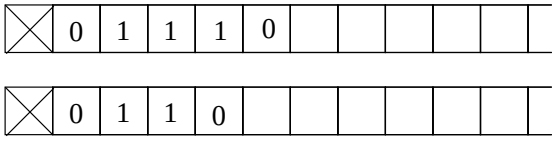
Si la première bande d'une machine contient une suite de symboles $u_0, u_1, \ldots$ et la deuxième bande contient un entier k représenté par k bâtons, l'ensemble des deux bandes décrit une *suite pointée de symboles*, c'est-à-dire la suite $u_0, u_1, \ldots$ dans laquelle l'élément u_k est privilégié.



1. Montrer qu'il existe une machine de Turing qui lit un entier n, écrit avec n bâtons, sur la première bande et écrit $2n$ bâtons sur la deuxième bande.

2. Montrer qu'il existe une machine de Turing qui lit un entier n écrit en binaire, le chiffre de poids faible en tête, sur la première bande, à partir de la position k indiquée par le nombre de bâtons de la deuxième bande, qui écrit n bâtons sur la troisième bande et qui ajoute des bâtons sur la deuxième bande, jusqu'au premier élément de la première qui n'est pas un chiffre binaire.

3. Montrer qu'il existe une machine de Turing qui lit une suite de 0 et de 1 sur la première bande, supprime les deux derniers symboles et écrit à la fin de la suite obtenue un 1 si ces deux derniers symboles étaient des 1 et 0 sinon.



La *logique des propositions* est le fragment de la logique des prédicats dont les propositions sont construites avec des symboles de prédicat sans arguments, appelés *symboles de proposition*, et les symboles $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\Rightarrow$. Un exemple est la proposition

$$P_1 \Rightarrow (P_0 \wedge P_2)$$

On appelle les symboles de proposition P_0, P_1, ..., P_n où les indices des symboles apparaissant dans une proposition forment un segment initial de l'ensemble des entiers. On écrit une telle proposition sur une bande sous forme postfixe en écrivant les indices en binaire, le chiffre de poids faible en tête. Ainsi, la proposition ci-avant s'écrit

⨯	P	1	P	0	P	0	1	$\wedge$	$\Rightarrow$		

Un modèle d'une telle proposition est simplement une fonction qui associe une valeur de vérité 0 ou 1 à chaque symbole de proposition. On écrit un tel modèle sur une bande d'une machine de Turing en écrivant successivement la valeur de vérité associée à P_0, P_1, P_2, ... par exemple

⨯	0	1	1	1	0					

4. Montrer qu'il existe une machine de Turing qui lit un symbole de proposition P_n écrit sur la première bande à partir de la position k indiquée par le nombre de bâtons de la deuxième bande et un modèle sur la troisième bande et écrit la valeur de vérité de ce symbole de proposition sur la quatrième.

⨯				P	0	1					
⨯	|	|	|								
⨯	0	1	1	0							
⨯											

⨯				P	0	1					
⨯	|	|	|								
⨯	0	1	1	0							
⨯	1										

5. Montrer qu'il existe une machine de Turing qui lit une proposition sur la première bande et un modèle sur la deuxième et écrit la valeur de vérité de cette proposition sur la troisième.

	P	1	P	0	P	0	1	$\wedge$	$\Rightarrow$		
	0	1	1	0							

	P	1	P	0	P	0	1	$\wedge$	$\Rightarrow$		
	0	1	1	0							
	0										

6. Soit n le nombre de symboles de la proposition, montrer que tous les indices des symboles de proposition sont majorés par n. Montrer que la longueur de la représentation de la proposition sur une bande d'une machine de Turing est comprise entre n et $n(2 + \log_2(n))$.

   Soit E un ensemble d'arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini. On dit que l'ensemble E est *dans la classe* P s'il existe une machine de Turing qui termine toujours telle que

   - pour tout arbre a, a appartient à E si et seulement si l'exécution de la machine sur l'arbre a donne le résultat 1 et
   - il existe un polynôme f tel que le nombre d'étapes de l'exécution de cette machine sur un arbre de taille p soit majoré par $f(p)$.

7. Montrer que l'ensemble des couples formés d'une proposition A et d'un modèle $\mathcal{M}$ tels que A soit valide dans $\mathcal{M}$ est dans la classe P.

Exercice 2

On étend la notion de machine de Turing en une notion de *machine de Turing non déterministe*. Pour chaque couple formé d'une suite de symboles et d'un état, la table d'une machine de Turing ordinaire prescrit une transition unique consistant à écrire une suite de symboles, évoluer vers un nouvel état et effectuer un mouvement de la tête. En revanche, pour chaque couple, la table d'une machine de Turing non déterministe spécifie un ensemble fini de transitions possibles.

La table d'une telle machine n'est donc pas une fonction qui à tout élément de $\Sigma^k \times S$ associe un élément de $\Sigma^k \times S \times \{-1, 0, +1\}$, mais une fonction qui, à tout élément de $\Sigma^k \times S$, associe une partie finie et non vide de $\Sigma^k \times S \times \{-1, 0, +1\}$.

Une configuration initiale d'une machine ordinaire détermine une unique suite de transitions, une configuration initiale d'une machine non déterministe détermine, en revanche, un ensemble de suites de transitions où, à chaque étape, la machine effectue l'une des transitions spécifiées par la table. Ces différentes suites de transitions mènent à différents résultats. Une machine de Turing non

déterministe définit donc une fonction qui à des arbres $p_1, \ldots, p_n$ associe, non un arbre, mais un ensemble d'arbres.

Soit E un ensemble d'arbres étiquetés par les éléments d'un ensemble fini. On dit que l'ensemble E est *dans la classe* NP s'il existe une machine de Turing non déterministe qui termine toujours telle que

- pour tout arbre a, a appartient à E si et seulement si *l'une des* suites de transitions de la machine sur l'arbre a donne le résultat 1 et
- il existe un polynôme f tel que la longueur de toutes les suites de transitions de cette machine sur un arbre de taille p soit majorée par $f(p)$.

Montrer que l'ensemble SAT des propositions de la logique des propositions définie à l'exercice qui sont cohérentes — on dit aussi *satisfiables* —, c'est-à-dire qui ont un modèle, est dans la classe NP.