

Logique et calculabilité - PC5

Exercice 1

La démonstration du théorème de Gödel montre qu'il existe une proposition close G telle que ni G ni $\neg G$ ne soit démontrable dans l'arithmétique, mais ne donne pas d'exemple d'une telle proposition. On montre dans cet exercice qu'on peut la modifier de manière à exhiber un tel exemple.

Soit f la fonction calculable telle que $f(n, p, q) = 1$ si $n = \ulcorner \pi \urcorner$, $p = \ulcorner A \urcorner$ et l'arbre π est une démonstration dans l'arithmétique de la proposition $(\underline{q}/w)A$ et $f(n, p, q) = 0$ sinon.

Soit F la proposition représentant un programme exprimant cette fonction. On écrit $F[t_1, t_2, t_3, u]$ la proposition $(t_1/x_1, t_2/x_2, t_3/x_3, u/y)F$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes

- $f(n, p, q) = r$,
- la proposition $F[\underline{n}, \underline{p}, \underline{q}, \underline{r}]$ est démontrable dans l'arithmétique,
- dans le modèle $\mathbb{N}$, $\llbracket F \rrbracket_{x_1=n, x_2=p, x_3=q, x_4=r} = 1$.

Soit T la proposition $\forall x \neg F[x, w, w, \underline{1}]$, soit $m = \ulcorner T \urcorner$ et soit G la proposition close $(\underline{m}/w)T$.

1. Montrer que si G est démontrable dans l'arithmétique alors
 - (a) $\llbracket G \rrbracket = 1$,
 - (b) pour tout entier n , $\llbracket F \rrbracket_{x_1=n, x_2=m, x_3=m, y=1} = 0$,
 - (c) pour tout n , $f(n, m, m) = 0$,
 - (d) la proposition $(\underline{m}/w)T$ n'est pas démontrable dans l'arithmétique,
 - (e) la proposition G n'est pas démontrable dans l'arithmétique.
2. En déduire que la proposition G n'est pas démontrable dans l'arithmétique
3. Montrer que si $\neg G$ est démontrable dans l'arithmétique alors
 - (a) $\llbracket \neg G \rrbracket = 1$,
 - (b) il existe un entier n tel que $\llbracket F \rrbracket_{x_1=n, x_2=m, x_3=m, y=1} = 1$,
 - (c) il existe un entier n tel que $f(n, m, m) = 1$,
 - (d) la proposition $(\underline{m}/w)T$ est démontrable dans l'arithmétique,
 - (e) la proposition G est démontrable dans l'arithmétique,
 - (f) l'arithmétique est contradictoire.
4. En déduire que la proposition $\neg G$ n'est pas démontrable dans l'arithmétique.

Exercice 2

Dans cet exercice on admettra le théorème de Matiyasevich, c'est-à-dire que l'ensemble des propositions démontrables dans l'arithmétique de la forme

$$\exists x_1 \dots \exists x_m (t = u)$$

est indécidable.

1. Montrer qu'il existe une proposition close A de la forme $\exists x_1 \dots \exists x_m (t = u)$ telle que ni A ni $\neg A$ ne soit démontrable dans l'arithmétique.
2. Montrer que la proposition $\forall x_1 \dots \forall x_m \neg(t = u)$ n'est pas démontrable.
3. Montrer que si a est un terme clos de l'arithmétique, alors il existe un entier n tel que la proposition $a = \underline{n}$ soit démontrable. Montrer que si n et p sont deux entiers, alors ou bien la proposition $\underline{n} = \underline{p}$ est démontrable ou bien la proposition $\neg(\underline{n} = \underline{p})$ est démontrable. Montrer que si a et b sont deux termes clos de l'arithmétique, alors la proposition $a = b$ est démontrable ou la proposition $\neg(a = b)$ est démontrable.
4. Soit une équation $t = u$ dont les variables sont parmi $x_1, \dots, x_m$ et $p_1, \dots, p_m$ des entiers tels que la proposition $(\underline{p_1}/x_1, \dots, \underline{p_m}/x_m)(t = u)$ soit démontrable. Montrer que la proposition $\exists x_1 \dots \exists x_m (t = u)$ est démontrable. Montrer que si la proposition $\exists x_1 \dots \exists x_m (t = u)$ n'est pas démontrable, alors pour tout $p_1, \dots, p_m$, la proposition $(\underline{p_1}/x_1, \dots, \underline{p_m}/x_m)(t = u)$ n'est pas démontrable.
5. Montrer que si la proposition $\exists x_1 \dots \exists x_m (t = u)$ n'est pas démontrable, alors pour tout $p_1, \dots, p_m$, la proposition $(\underline{p_1}/x_1, \dots, \underline{p_m}/x_m)\neg(t = u)$ est démontrable.
6. Montrer qu'il existe une proposition A de la forme $\neg(t = u)$ dont les variables sont parmi $x_1, \dots, x_m$ et telle que
 - pour tous $p_1, \dots, p_m$ la proposition $(\underline{p_1}/x_1, \dots, \underline{p_m}/x_m)A$ est démontrable
 - la proposition $\forall x_1 \dots \forall x_m A$ n'est pas démontrable.