

Logique et calculabilité - PC1

Exercice 1

Soit \mathcal{L} le langage mono-sorté formé des symboles \mathbb{C} , \mathbb{N} , 0 , $=$, \wedge — *puissance* —, \in et $\#$ — *cardinal*.

1. Écrire le théorème

Tout nombre complexe non nul a n racines n -ièmes.

(c.f. E. Ramis, C. Deschamps et J. Odoux, *Cours de Mathématique spéciale*, Masson, 1979, p. 138) comme une proposition du langage \mathcal{L} .

2. Quels symboles sont des symboles de prédicats, quels symboles sont des symboles de fonctions ?
3. Quelle est l'arité de chaque symbole ?

Exercice 2

On considère un langage à trois sortes de termes : *point*, *droite* et *scalaire* formé de deux symboles de prédicat $=$ d'arité (*scalaire, scalaire*) et \in d'arité (*point, droite*) et de deux symboles de fonction d , *distance*, d'arité (*point, point, scalaire*) et m , *médiatrice*, d'arité (*point, point, droite*). Soient Γ l'ensemble contenant les propositions

$$\forall x \forall y \forall z (x \in m(y, z) \Leftrightarrow d(x, y) = d(x, z))$$

et

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z)$$

et A la proposition qui exprime que si deux médiatrices du triangle xyz sont concourantes, alors ses trois médiatrices le sont

$$\forall w \forall x \forall y \forall z ((w \in m(x, y) \wedge w \in m(y, z)) \Rightarrow w \in m(x, z))$$

Donner une démonstration du séquent $\Gamma \vdash A$.

Exercice 3

Montrer que si le séquent $\Gamma, \neg A \vdash \perp$ est démontrable alors le séquent $\Gamma \vdash A$ également.

Exercice 4

Donner une démonstration, dans la théorie de l'égalité — p. 32-33 — de la proposition

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \Rightarrow y = z \Rightarrow x = z)$$

et de la proposition

$$\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$$