

## Logique et calculabilité

## Composition

Gilles Dowek

Lundi 8 Décembre 2008, 2h

**Exercice 1**

1. Quelles sont les variables libres de la proposition  $(\forall x P(x)) \wedge P(y)$  ?
2. Et celles de la proposition  $(\forall x P(x)) \wedge P(x)$  ?

**Exercice 2**

1. Donner une démonstration en déduction naturelle de la proposition

$$(\exists y \forall x P(x, y)) \Rightarrow (\forall x \exists y P(x, y))$$

2. La proposition

$$(\forall x \exists y P(x, y)) \Rightarrow (\exists y \forall x P(x, y))$$

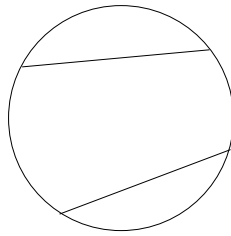
est-elle démontrable ? Donner un exemple de modèle dans lequel elle n'est pas valide.

**Exercice 3**

On se donne un langage  $\mathcal{L}$  à deux sortes d'objets :  $p$  (pour *point*) et  $d$  (pour *droite*), un symbole de prédicat  $=_p$  pour l'égalité des points, un symbole de prédicat  $=_d$  pour l'égalité des droites et un symbole de prédicat  $\in$  pour l'appartenance d'un point à une droite.

1. Quelles sont les arités des symboles  $=_p$ ,  $=_d$  et  $\in$  ?
2. Deux droites sont dites parallèles si elles n'ont aucun point en commun. Donner une proposition  $P$  contenant deux variables libres  $D$  et  $D'$  et exprimant que les droites  $D$  et  $D'$  sont parallèles.

3. Donner une proposition  $A_1$  sans variables libres exprimant que par deux points distincts il passe au moins une droite.  
Donner une proposition  $A_2$  sans variables libres exprimant que par deux points distincts il passe au plus une droite.  
Donner une proposition  $A$  sans variables libres exprimant que par deux points distincts il passe une droite unique.
4. Donner une proposition  $B$  sans variables libres exprimant que par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.
5. Soit  $\Delta$  un disque du plan limité par un cercle  $C$ , on construit un modèle égalitaire du langage  $\mathcal{L}$  en prenant pour  $\mathcal{M}_p$  l'ensemble des points du disque  $\Delta$ , pour  $\mathcal{M}_d$  l'ensemble des segments dont les extrémités sont sur le cercle  $C$  et pour  $\hat{=}$  la relation d'appartenance d'un point à un segment.



La proposition  $A$  est-elle valide dans ce modèle ?

6. Et la proposition  $B$  ?

## Exercice 4

1. Donner un système de réécriture qui transforme l'expression  $F(n)$  où  $n$  est un nombre entier écrit avec les symboles 0 et  $S$  en 1 si  $n$  est impair et en 0 s'il est pair.
2. Donner un terme du lambda-calcul qui représente, sur les entiers de Church, la fonction qui à un entier  $n$  associe l'entier 1 si  $n$  est impair et 0 s'il est pair.
3. Donner une machine de Turing à deux bandes qui si elle démarre avec un entier  $n$  écrit à l'aide de bâtons sur la première bande, et une seconde bande qui ne contient qu'une croix dans la case de gauche, écrit un bâton sur la seconde bande si l'entier  $n$  est impair et n'écrit rien s'il est pair.