Logique et Calculabilité
INF551

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu

Cours 8
Démonstration automatique

La semi-décidabilité

On énumère tous les arbres

Si une démonstration de A existe, elle finira par se présenter

Sinon on ne termine pas (μ)

Utilité théorique (semi-décidabilité, th. de Gödel)

Mais sans intérêt pratique

Toutefois : l'idée d'énumération et de test a un intérêt pratique

I. La recherche de preuve :

de la déduction naturelle au calcul des séquents

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud

De bas en haut

$$\frac{}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}$$

Commençons par essayer une règle d'introduction

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud

De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P \wedge Q}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)} \Rightarrow\text{-intro}$$

Commençons par essayer une règle d'introduction

Encore une règle d'introduction

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud

De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-intro}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Commençons par essayer une règle d'introduction

Encore une règle d'introduction

On essaie *axiome*

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud

De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \textit{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \textit{axiome}}{\dfrac{P, Q \vdash P \wedge Q}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}}\ \wedge\text{-intro}$$

Commençons par essayer une règle d'introduction

Encore une règle d'introduction

On essaie *axiome*

Énumérer les règles

Énumérer les règles qui peuvent s'appliquer à chaque nœud

De bas en haut

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \textit{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \textit{axiome}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-intro}}{P \vdash Q \Rightarrow (P \wedge Q)}\ \Rightarrow\text{-intro}$$

Commençons par essayer une règle d'introduction

Encore une règle d'introduction

On essaie *axiome*

Combien de possibilités ?

Les règles d'élimination

Situation moins agréable

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

Peut toujours s'appliquer

Il faut deviner B qui n'apparaît pas en bas (*i.e.* énumérer tous les B possibles)

Les règles d'élimination

Situation moins agréable

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

Peut toujours s'appliquer

Il faut deviner B qui n'apparaît pas en bas (*i.e.* énumérer tous les B possibles)

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P}$$

Les règles d'élimination

Situation moins agréable

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

Peut toujours s'appliquer

Il faut deviner B qui n'apparaît pas en bas (*i.e.* énumérer tous les B possibles)

$$\frac{\overline{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}}{P \wedge Q \vdash P} \wedge\text{-élim}$$

Comment a-t-on deviné $\wedge$ et Q ?

Une dissymétrie

En déduction naturelle

La forme de la conclusion du séquent permet de guider le choix des introductions

La forme des hypothèses du séquent ne permet pas de guider le choix des éliminations

L'idée du calcul des séquents

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites

Éliminations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauche

e.g.

$$\frac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

L'idée du calcul des séquents

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites

Éliminations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauche

e.g.

$$\frac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$$

Que faire de cette hypothèse ?

L'idée du calcul des séquents

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites

Éliminations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauche

e.g.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge\text{-gauche}$$

L'idée du calcul des séquents

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites

Élimiations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauche

e.g.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge\text{-gauche}$$

Revenons à notre exemple

$$\frac{}{P \wedge Q \vdash P}$$

L'idée du calcul des séquents

Introductions (marchent bien) : conservées : règles droites

Éliminations : remplacées par règles d'introduction appliquées aux hypothèses : règles gauche

e.g.

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C} \wedge\text{-gauche}$$

Revenons à notre exemple

$$\frac{P, Q \vdash P}{P \wedge Q \vdash P} \wedge\text{-gauche}$$

D'autres règles

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash C} \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \neg A \vdash B} \neg\text{-gauche}$$

$$\frac{}{\Gamma, \bot \vdash A} \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B} \forall\text{-gauche}$$

Un exemple et le tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{?}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg\text{-gauche}$$

Un exemple et le tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{?}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg\text{-gauche}$$

En déduction naturelle : Règle spéciale

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

Un exemple et le tiers exclu

$$\dfrac{\dfrac{?}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\ \neg\text{-gauche}$$

En déduction naturelle : Règle spéciale

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

Peut se remplacer par

$$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

Un exemple et le tiers exclu

$$\cfrac{\cfrac{?}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q} \; \neg\text{-gauche}$$

En déduction naturelle : Règle spéciale

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}$$

Peut se remplacer par

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$$

En calcul des séquents : on peut faire pareil

Sur l'exemple : sauvegarder Q à gauche

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P, \color{red}{\neg Q} \vdash \bot}\ \neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \color{red}{\neg\neg Q}}\ \neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \color{red}{Q}}\ \text{tiers exclu}
$$

Sur l'exemple : sauvegarder Q à gauche

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\,\text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,\text{axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\,\Rightarrow\text{-gauche}}{P, \neg Q, P \Rightarrow Q \vdash \bot}\,\neg\text{-gauche}}{P, \neg Q \vdash \neg(P \Rightarrow Q)}\,\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P, \neg Q \vdash \bot}\,\neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \neg\neg Q}\,\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\,\text{tiers exclu}$$

Ou alors le laisser à droite

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{}{P \vdash P}\ \text{axiome} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \text{axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash \color{red}{Q}}\ \Rightarrow\text{-gauche}
}{P, P \Rightarrow Q \vdash (\bot,)\color{red}{Q}}\ (\neg\text{-gauche})
}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), \color{red}{Q}}\ \neg\text{-droite}
}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash (\bot,)\color{red}{Q}}\ \neg\text{-gauche}
}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \color{red}{Q}}\ (\neg\text{-droite})
}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash \color{red}{Q}}
}{}
$$

Ou alors le laisser à droite

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P \vdash P}\text{ axiome}\quad\cfrac{}{P, Q \vdash Q}\text{ axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash {\color{red}Q}}\Rightarrow\text{-gauche}}{P, P \Rightarrow Q \vdash (\bot,){\color{red}Q}}(\neg\text{-gauche})}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), {\color{red}Q}}\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash (\bot,){\color{red}Q}}\neg\text{-gauche}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash {\color{red}Q}}(\neg\text{-droite})}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash {\color{red}Q}}$$

Des séquents avec plusieurs propositions à droite

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P \vdash P, Q}\text{ axiome}\quad\cfrac{}{P, Q \vdash Q}\text{ axiome}}{P, P \Rightarrow Q \vdash Q}\Rightarrow\text{-gauche}}{P \vdash \neg(P \Rightarrow Q), Q}\neg\text{-droite}}{\neg\neg(P \Rightarrow Q), P \vdash Q}\neg\text{-gauche}$$

II. Les règles du calcul des séquents

Les règles logiques

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

La règle axiome :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{axiome}$$

Les règles logiques

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

La règle axiome : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$ axiome

De bas en haut, chaque règle diminue le nombre de connecteurs

Les règles logiques

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

La règle axiome : $$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{axiome}$$

De bas en haut, chaque règle diminue le nombre de connecteurs

Hauteur des arbres de preuves bornée !

Les règles logiques

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite} \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

La règle axiome : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}$ axiome

De bas en haut, chaque règle diminue le nombre de connecteurs

Hauteur des arbres de preuves bornée !

Algorithme de décision

Les règles logiques

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top, \Delta}\ \top\text{-droite} \qquad \dfrac{}{\Gamma, \bot \vdash \Delta}\ \bot\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \wedge\text{-droite} \qquad \dfrac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \vee\text{-droite} \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \vee\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ \Rightarrow\text{-droite} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}\ \Rightarrow\text{-gauche}$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \neg\text{-droite} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \neg\text{-gauche}$$

La règle axiome : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\ \text{axiome}$

De bas en haut, chaque règle diminue le nombre de connecteurs

Hauteur des arbres de preuves bornée !

Algorithme de décision ...pour la logique propositionnelle

…et pour les quantificateurs ?

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, \qquad (t/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)P, \qquad \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\, x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

...et pour les quantificateurs ?

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, \quad (t/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)P, \quad \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Déduction naturelle : permanence des hyp. : utilisations multiples

On peut vouloir utiliser une hypothèse plusieurs fois

...et pour les quantificateurs ?

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x\ P), (t/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash (t/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Déduction naturelle : permanence des hyp. : utilisations multiples

On peut vouloir utiliser une hypothèse plusieurs fois

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob). . .

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si...

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y))$

$$\frac{}{\vdash A}$$

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob). . . et si. . . on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y))$

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash \text{boit}(\text{Bob}) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash A}\ t = \text{Bob}$$

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y \text{ boit}(y))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \forall y \text{ boit}(y), A}}{\vdash \text{boit}(\text{Bob}) \Rightarrow \forall y \text{ boit}(y), A}}{\vdash A}\ t = \text{Bob}$$

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \text{boit}(y), A}}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash \text{boit}(\text{Bob}) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash A}\ t = \text{Bob}$$

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \text{boit}(y), \text{boit}(y) \Rightarrow \forall y'\ \text{boit}(y'), A}}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \text{boit}(y), A}\ t = y}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash \text{boit}(\text{Bob}) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash A}\ t = \text{Bob}$$

Exemple : Le théorème du buveur

Il existe quelqu'un tel que s'il boit tout le monde boit

Preuve informelle :

On prend la première personne (Bob)... et si... on change d'avis

Preuve formelle : Soit A la formule $\exists x\ (\text{boit}(x) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{boit}(\text{Bob}), \text{boit}(y) \vdash \text{boit}(y), \forall y'\ \text{boit}(y'), A}}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \text{boit}(y), \text{boit}(y) \Rightarrow \forall y'\ \text{boit}(y'), A}}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \text{boit}(y), A}\ t = y}{\text{boit}(\text{Bob}) \vdash \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash \text{boit}(\text{Bob}) \Rightarrow \forall y\ \text{boit}(y), A}}{\vdash A}\ t = \text{Bob}$$

Comment traduire la déduction naturelle ?

Traduire une preuve de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{-élim}$$

Une preuve π' de $\Gamma \vdash A \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \dfrac{\overline{\Gamma, A, B \vdash A}\ \text{axiome}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A} \wedge\text{-gauche}}{}$$

Comment traduire la déduction naturelle ?

Traduire une preuve de la forme

$$\dfrac{\dfrac{\pi}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\text{-élim}$$

Une preuve π' de $\Gamma \vdash A \wedge B$

$$\dfrac{\dfrac{\pi'}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A, B \vdash A}\ \text{axiome}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A}\ \wedge\text{-gauche}}{\Gamma \vdash A}\ \text{coupure}$$

Dans un premier temps, on ajoute la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\text{ coupure}$$

La règle de coupure

Dans un premier temps, on ajoute la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}\text{ coupure}$$

Dans un second temps : montrer que cette règle est superflue

élimination des coupures

La règle de coupure

Dans un premier temps, on ajoute la règle

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta} \text{ coupure}$$

Dans un second temps : montrer que cette règle est superflue

élimination des coupures

Pourquoi vouloir éliminer les coupures ?

Ruine tous les avantages du calcul des séquents

Deux théorèmes

Équivalence avec la déduction naturelle :

$\Gamma \vdash A$ prouvable en DN ssi prouvable en CS

Traductions dans les deux sens

Élimination des coupures :

$\Gamma \vdash \Delta$ a une preuve en CS ssi a une preuve sans coupures

Élimination progressive

Un cas typique

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}}{\Gamma, {\color{red}A \wedge B} \vdash \Delta}\ \wedge\text{-gauche} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A, \Delta} \quad \dfrac{\pi_3}{\Gamma \vdash B, \Delta}}{\Gamma \vdash {\color{red}A \wedge B}, \Delta}\ \wedge\text{-droite}}{\Gamma \vdash \Delta}\ \text{coupure}
$$

Un cas typique

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A, B \vdash \Delta}}{\Gamma, {\color{red}A \wedge B} \vdash \Delta}\,\wedge\text{-gauche} \qquad \dfrac{\dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A, \Delta} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma \vdash B, \Delta}}{\Gamma \vdash {\color{red}A \wedge B}, \Delta}\,\wedge\text{-droite}}{\Gamma \vdash \Delta}\,\text{coupure}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\pi_1}{\Gamma, A, B \vdash \Delta} \qquad \dfrac{\pi_3}{\Gamma, A \vdash B, \Delta}}{\Gamma, A \vdash \Delta}\,\text{coupure} \qquad \dfrac{\pi_2}{\Gamma \vdash A, \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}\,\text{coupure}$$

III. La recherche de preuve en calcul des séquents sans coupures

Quels choix ?

Plus besoin d'énumérer toutes les propositions possibles

Mais. . . il reste quelques choix à faire

Quels choix ?

Plus besoin d'énumérer toutes les propositions possibles

Mais. . . il reste quelques choix à faire

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,?}{P, Q \vdash P \wedge Q}\,\wedge\text{-droite}$$

Quels choix ?

Plus besoin d'énumérer toutes les propositions possibles

Mais... il reste quelques choix à faire

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\ \textcolor{red}{?} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\ \textcolor{red}{?}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-droite}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

Quels choix ?

Plus besoin d'énumérer toutes les propositions possibles

Mais. . . il reste quelques choix à faire

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,{\color{red}?} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,{\color{red}?}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-droite}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix du terme

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\ A, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Plusieurs types de choix : Ou bien A ou bien B

Cas général : Choix arborescent — don't know

on choisit A, si A échoue on choisit B (backtrack)

Choix indifférent — don't care

peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même

(séquentialisation de tâches indépendantes)

Plusieurs types de choix : Ou bien A ou bien B

Cas général : Choix arborescent — don't know

on choisit A, si A échoue on choisit B (backtrack)

Choix indifférent — don't care

peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même

(séquentialisation de tâches indépendantes)

1. Le choix du séquent

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,?}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix du terme

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\ A, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Plusieurs types de choix : Ou bien A ou bien B

Cas général : Choix arborescent — don't know

on choisit A, si A échoue on choisit B (backtrack)

Choix indifférent — don't care

peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même

(séquentialisation de tâches indépendantes)

1. Le choix du séquent — don't care

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,?}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix du terme

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\ A, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Plusieurs types de choix : Ou bien A ou bien B

Cas général : Choix arborescent — don't know

on choisit A, si A échoue on choisit B (backtrack)

Choix indifférent — don't care

peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même

(séquentialisation de tâches indépendantes)

1. Le choix du séquent — don't care

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,? \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,?}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome — don't care ! ?

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix du terme

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\ A, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Plusieurs types de choix : Ou bien A ou bien B

Cas général : Choix arborescent — don't know

on choisit A, si A échoue on choisit B (backtrack)

Choix indifférent — don't care

peu importe que l'on choisisse A ou B, le résultat sera le même

(séquentialisation de tâches indépendantes)

1. Le choix du séquent — don't care

$$\dfrac{\dfrac{}{P, Q \vdash P}\,{?} \qquad \dfrac{}{P, Q \vdash Q}\,{?}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ \wedge\text{-élim}$$

2. Le choix de la proposition, ou de l'application d'un axiome — don't care ! ?

$$P \wedge Q \vdash Q \vee R$$

3. Le choix du terme — don't know

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\ A, (t/x)A \vdash B}{\Gamma, \forall x\ A \vdash B}\ \forall\text{-gauche}$$

Choix finis et infinis

Choix de la proposition : fini

Choix du terme : infini

Éviter le choix du terme ?

$$\frac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\, P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

Choix finis et infinis

Choix de la proposition : fini

Choix du terme : infini

Éviter le choix du terme ?

$$\frac{}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\, P(f(x))} \ \exists\text{-droite}$$

essayer c, $f(c)$, $f(f(c))$,...

Quel terme choisir ? Comment l'a-t-on deviné ?

Choix finis et infinis

Choix de la proposition : fini

Choix du terme : infini

Éviter le choix du terme ?

$$\dfrac{\dfrac{}{P(f(f(c))) \vdash P(f(X))}\ \text{axiome}}{P(f(f(c))) \vdash \exists x\, P(f(x))}\ \exists\text{-droite}$$

essayer c, $f(c)$, $f(f(c))$,...

Quel terme choisir ? Comment l'a-t-on deviné ?

Essayons plutôt de retarder le choix de ce terme : méta-variable X

Calcul des séquents avec méta-variables : 1ère tentative

Calcul des séquents avec méta-variables : 1ère tentative

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

Calcul des séquents avec méta-variables : 1ère tentative

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Calcul des séquents avec méta-variables : 1ère tentative

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma \vdash (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

On doit donc enrichir notre syntaxe de termes :

$$t ::= x \mid X \mid f(t_1, \ldots, t_n) \qquad \text{si } f/n \in \Sigma$$

$mv(t)$ et $mv(\Gamma)$ sont les équivalents de $fv(t)$ et $fv(\Gamma)$ pour les méta-variables.

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(Y), (\exists y\, r(y))}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(Y), (\exists y\, r(y))}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

On a envie de dire : on a gagné en instanciant Y par 986

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(Y), (\exists y\, r(y))}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

On a envie de dire : on a gagné en instanciant Y par 986

Plus généralement, que faire lors d'un axiome ?

$$\dfrac{}{\Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(Y), (\exists y\, r(y))}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

On a envie de dire : on a gagné en instanciant Y par 986

Plus généralement, que faire lors d'un axiome ?

$$\dfrac{}{\Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

Ce serait bien d'instancier toutes les méta-variables afin que, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on ait $t_i = u_i$.

Axiome et Substitution

Exemple : $\dfrac{r(986) \vdash r(Y), (\exists y\, r(y))}{r(986) \vdash \exists y\, r(y)}$

On a envie de dire : on a gagné en instanciant Y par 986

Plus généralement, que faire lors d'un axiome ?

$$\dfrac{}{\Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

Ce serait bien d'instancier toutes les méta-variables afin que,

pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on ait $t_i = u_i$.

Substitution : fonction partielle des méta-variables vers les termes ($\sigma(X) = t$), que l'on étend facilement aux termes ($\sigma(u) = t$) ainsi :

$$\begin{array}{lll}
\sigma(f(t_1, \ldots, t_n)) & = f(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) & \\
\sigma(x) & = x & \\
\sigma(X) & = X & \text{si } X \notin \text{domaine}(\sigma)
\end{array}$$

Unificateur et Propagation

Formellement, on cherche donc une substitution σ telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$.

σ est un **unificateur**, i.e.

σ est une solution du problème d'**unification** $t_1 = u_1$,..., $t_n = u_n$

Unificateur et Propagation

Formellement, on cherche donc une substitution σ telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$.

σ est un **unificateur**, i.e.

σ est une solution du problème d'**unification** $t_1 = u_1$,..., $t_n = u_n$

Example: Soit $A = \forall x\ p(x, x)$ and $B = \exists y\ (p(y, 0) \wedge p(y, S(0)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A, p(X, X) \vdash p(Y, 0), B}}{A \vdash p(Y, 0), B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, p(X', X') \vdash p(Y, S(0)), B}}{A \vdash p(Y, S(0)), B}}{\dfrac{A \vdash p(Y, 0) \wedge p(Y, S(0)), B}{A \vdash B}}$$

Unificateur et Propagation

Formellement, on cherche donc une substitution σ telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$.

σ est un **unificateur**, i.e.

σ est une solution du problème d'**unification** $t_1 = u_1$,..., $t_n = u_n$

Example: Soit $A = \forall x\, p(x,x)$ and $B = \exists y\, (p(y,0) \wedge p(y,S(0)))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma(Y) = \sigma(X) = 0}{A, p(X,X) \vdash p(Y,0), B}}{A \vdash p(Y,0), B} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma'(Y) = \sigma'(X') = S(0)}{A, p(X',X') \vdash p(Y,S(0)), B}}{A \vdash p(Y,S(0)), B}}{A \vdash p(Y,0) \wedge p(Y,S(0)), B}}{A \vdash B}
$$

Unificateur et Propagation

Formellement, on cherche donc une substitution σ telle que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, on a $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$.

σ est un **unificateur**, i.e.

σ est une solution du problème d'**unification** $t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n$

Example: Soit $A = \forall x \, p(x,x)$ and $B = \exists y \, (p(y,0) \wedge p(y, S(0)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma(Y) = \sigma(X) = 0}{A, p(X,X) \vdash p(Y,0), B}}{A \vdash p(Y,0), B} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{ok avec } \sigma'(Y) = \sigma'(X') = S(0)}{A, p(X',X') \vdash p(Y,S(0)), B}}{A \vdash p(Y,S(0)), B}}{A \vdash p(Y,0) \wedge p(Y,S(0)), B}}{A \vdash B}$$

σ et σ' incompatibles : impossible de reconstruire de preuve. Dès qu'on choisit l'un, il faut propager ce choix dans l'autre branche.

Calcul des séquents avec méta-variables : 2ème tentative

On regroupe l'état de toutes les branches ouvertes $(\Gamma_1 \vdash \Delta_1) \ldots (\Gamma_n \vdash \Delta_n)$ dans une structure de données :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \ \wr \ \ldots \ \wr \ \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

Calcul des séquents avec méta-variables : 2ème tentative

On regroupe l'état de toutes les branches ouvertes $(\Gamma_1 \vdash \Delta_1) \ldots (\Gamma_n \vdash \Delta_n)$ dans une structure de données :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \;\wr\; \ldots \;\wr\; \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Calcul des séquents avec méta-variables : 2ème tentative

On regroupe l'état de toutes les branches ouvertes $(\Gamma_1 \vdash \Delta_1) \ldots (\Gamma_n \vdash \Delta_n)$ dans une structure de données :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \;\wr\; \ldots \;\wr\; \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\forall x\, P), \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\, P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\, P) \vdash \Delta}\; \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\, P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\exists x\, P), \Delta}\; \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x\, P) \vdash \Delta}\; x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\sigma(\mathcal{S})}{\mathcal{S} \wr \Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}$$

Calcul des séquents avec méta-variables : 2ème tentative

On regroupe l'état de toutes les branches ouvertes $(\Gamma_1 \vdash \Delta_1) \ldots (\Gamma_n \vdash \Delta_n)$ dans une structure de données :

$$\Gamma_1 \vdash \Delta_1 \ \wr \ \ldots \ \wr \ \Gamma_n \vdash \Delta_n$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P) \vdash \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta) \qquad \frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, P \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x\ P) \vdash \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\sigma(\mathcal{S})}{\mathcal{S} \wr \Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}\ \sigma \text{ unificateur des } (t_i = u_i)_i$$

…et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$		
$\neg$		
$\vee$		
$\wedge$		
$\Rightarrow$		

...et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$$	$$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$$
$\neg$		
$\vee$		
$\wedge$		
$\Rightarrow$		

...et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$		
$\wedge$		
$\Rightarrow$		

…et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta \;\wr\; \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$		
$\Rightarrow$		

…et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta \quad \wr \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta \quad \wr \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$
$\Rightarrow$		

…et les règles propositionnelles sont adaptées ainsi

Connect.	Règle d'intro gauche	Règle d'intro droite
$\top, \bot$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \bot \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S}}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \top, \Delta}$
$\neg$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, \neg A \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash \neg A, \Delta}$
$\vee$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash \Delta \;\wr\; \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vee B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \vee B, \Delta}$
$\wedge$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta \;\wr\; \Gamma \vdash B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}$
$\Rightarrow$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A, \Delta \;\wr\; \Gamma, B \vdash \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \Rightarrow B \vdash \Delta}$	$\dfrac{\mathcal{S} \wr \Gamma, A \vdash B, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}$

Unification

Revenons aux unificateurs.

Unification

Revenons aux unificateurs.

Questions :

Existe-il toujours un unificateur au problème $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$?

Revenons aux unificateurs.

Questions :

Existe-il toujours un unificateur au problème $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$?

Comment l'obtiens-je dans les cas non-triviaux ?

Unification

Revenons aux unificateurs.

Questions :

Existe-il toujours un unificateur au problème $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$?

Comment l'obtiens-je dans les cas non-triviaux ?

. . .**l'algorithme d'unification du 1er ordre**

L'algorithme d'unification : un exemple

Les solutions du problème

$$P(f(X)) = P(f(f(c)))$$

sont les mêmes que celles du problème

$$f(X) = f(f(c))$$

qui sont les mêmes que celles du problème

$$X = f(c)$$

et ce problème a une solution qui est la substitution $f(c)/X$.

L’algorithme d’unification : cas général

On choisit une équation dans le système

- $f(t_1, ..., t_n) = f(u_1, ..., u_n) \longrightarrow$ remplacer par $t_1 = u_1, ..., t_n = u_n$
- $f(t_1, ..., t_n) = g(u_1, ..., u_m) \longrightarrow$ échouer
- $X = X \longrightarrow$ supprimer
- $X = t$ (ou $t = X$), X apparaît dans t, t distinct de X, on échoue
- $X = t$ (ou $t = X$) X n’apparaît pas dans t, on substitue X par t dans le reste du système

  On résout $\longrightarrow$ substitution σ

  On retourne $\sigma \cup \{\sigma t/X\}$.

Le résultat est dénoté $mgu(t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n)$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z, z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z, z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$\frac{}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P_1 \vdash (\forall y \, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P_1 \vdash (p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{P_1, p(Z,Z) \vdash (p(X,S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (p(X,S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (\forall y \, p(X,S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_1, p(Z,Z) \vdash (p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
mgu(Z = X, Z = S(y)) : \quad & Z \mapsto S(y) \\
& X \mapsto S(y)
\end{aligned}
$$

Est-ce fini ?

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_1, p(Z,Z) \vdash (p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

avec

$$\begin{aligned} mgu(Z = X, Z = S(y)) : \quad & Z \mapsto S(y) \\ & X \mapsto S(y) \end{aligned}$$

Le terme pour x ne pouvait pas utiliser y, libéré plus tard !

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z, z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$\frac{}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z, z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\overline{P_1 \vdash_{X} (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P_1 \vdash_{X} (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_{X} (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{P_1, p(Z,Z) \vdash_{X} (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_{X} (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_{X} (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}
$$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{P_1, p(Z,Z) \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

pas ok, car aucun unificateur pour $Z = X, Z = S(y(X))$
$(mgu(Z = X, Z = S(y(X))) =$ Fail)

L’astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$
\begin{array}{c}
\hline
P_1, p(Z,Z) \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2 \\
\hline
P_1 \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2 \\
\hline
P_1 \vdash_X (\forall y\, p(X, S(y))), P_2 \\
\hline
P_1 \vdash P_2 \\
\hline
\vdash P_1 \Rightarrow P_2
\end{array}
$$

pas ok, car aucun unificateur pour $Z = X, Z = S(y(X))$
$(mgu(Z = X, Z = S(y(X))) =$ Fail)

Astuce technique, ou plus profond ?

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x\, \forall y\, p(x, S(y))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{P_1, p(Z,Z) \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (\forall y\, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}$$

pas ok, car aucun unificateur pour $Z = X, Z = S(y(X))$
$(mgu(Z = X, Z = S(y(X))) =$ Fail)

Astuce technique, ou plus profond ? Comparez

$\vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y\, P$ avec $\vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n (\wp(x_1, \ldots, x_n)/y) P$

L'astuce

Example: Soit $P_1 = \forall z, p(z,z)$ and $P_2 = \exists x \, \forall y \, p(x, S(y))$.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overline{P_1, p(Z,Z) \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (p(X, S(y(X)))), P_2}}{P_1 \vdash_X (\forall y \, p(X, S(y))), P_2}}{P_1 \vdash P_2}}{\vdash P_1 \Rightarrow P_2}
$$

pas ok, car aucun unificateur pour $Z = X, Z = S(y(X))$
($mgu(Z = X, Z = S(y(X)))$ = Fail)

Astuce technique, ou plus profond ? Comparez

$\vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \; P$ avec $\vdash \exists x_1 \ldots \exists x_n (\wp(x_1, \ldots, x_n)/y) P$

J'ai l'impression d'avoir déjà vu ça... Skolémisation ! (cours 3)

Calcul des séquents avec méta-variables

Cette fois-ci c'est la bonne !

Calcul des séquents avec méta-variables

Cette fois-ci c'est la bonne !

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi} (x(\Phi)/x)P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi} (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash_{\Phi,\mathbf{X}} \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P) \vdash_{\Phi} \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi,\mathbf{X}} (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi} (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (x(\Phi)/x)P \vdash_{\Phi} \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x\ P) \vdash_{\Phi} \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

Calcul des séquents avec méta-variables

Cette fois-ci c'est la bonne !

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi (x(\Phi)/x)P, \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi (\forall x\ P), \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P), (\mathbf{X}/x)P \vdash_{\Phi,\mathbf{X}} \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\forall x\ P) \vdash_\Phi \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_{\Phi,\mathbf{X}} (\mathbf{X}/x)P, (\exists x\ P), \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma \vdash_\Phi (\exists x\ P), \Delta}\ \mathbf{X} \notin mv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\mathcal{S} \wr \Gamma, (x(\Phi)/x)P \vdash_\Phi \Delta}{\mathcal{S} \wr \Gamma, (\exists x\ P) \vdash_\Phi \Delta}\ x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\sigma(\mathcal{S})}{\mathcal{S} \wr \Gamma, p(t_1, \ldots, t_n) \vdash_\Phi p(u_1, \ldots, u_n), \Delta}\ \sigma = mgu(t_1 = u_1, \ldots t_n = u_n)$$

La suite

En PC : La méthode de résolution

La prochaine fois : le λ-calcul et la constructivité

Questions?