École polytechnique **M1 d'Informatique**

Logique et calculabilité

Corrigé de la Composition

Gilles Dowek

Lundi 7 Décembre 2009, 2h

Exercice 1

1. x et y.
2. x.
3. $(\forall z\ P(z)) \wedge P(x) \wedge P(x) \wedge P(y)$.

Exercice 2

1.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A}\text{ axiome} \qquad \dfrac{}{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A}\text{ axiome}}{\neg\neg A, \neg A \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}}{\neg\neg A, \neg A \vdash A}\ \bot\text{-élim}$$

2.

$$\dfrac{\dfrac{}{\vdash A \vee \neg A}\text{ tiers exclu} \qquad \dfrac{}{\vdash \neg\neg A, A \vdash A}\text{ axiome} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A}\text{ axiome} \qquad \dfrac{}{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A}\text{ axiome}}{\neg\neg A, \neg A \vdash \bot}\ \neg\text{-élim}}{\neg\neg A, \neg A \vdash A}\ \bot\text{-élim}}{\neg\neg A \vdash A}\ \vee\text{-élim}$$

Exercice 3

1. $\mathbb{Z}$ muni de sa relation d'ordre strict naturelle.
2. $\mathbb{Q}$ muni de sa relation d'ordre strict naturelle.
3. Le modèle $\mathcal{M}$ étant un modèle de l'axiome N, il existe deux éléments a_0 et b tels que $a_0 \hat{<} b$. S'il existe des éléments $a_0, ..., a_n$ tels que pour tout i, $a_i \hat{<} a_{i+1}$ et $a_i \hat{<} b$, alors, le modèle $\mathcal{M}$ étant un modèle de l'axiome D, il existe un élément a_{n+1} tel que $a_n \hat{<} a_{n+1}$ et $a_{n+1} \hat{<} b$. Le modèle $\mathcal{M}$ étant un modèle de l'axiome T, si $i < j$, on a $a_i \hat{<} a_j$, et donc, le modèle $\mathcal{M}$ étant un modèle de l'axiome A, $a_i \neq a_j$. Le modèle $\mathcal{M}$ est donc infini.

4. Cette proposition n'est pas valide dans le modèle construit à la question 2., elle n'est donc pas démontrable.

5. D'après la question 3., si $\mathcal{M}$ est un modèle dans lequel cette proposition n'est pas valide, alors $\mathcal{M}$ est infini.

6. Oui, le modèle $\mathbb{Q}$.

Exercice 4

1.
$$F(0) \longrightarrow 0$$
$$F(S(x)) \longrightarrow S(S(F(x)))$$

2.
$$\mathit{fun}\ n \rightarrow \mathit{fun}\ x \rightarrow \mathit{fun}\ f \rightarrow (n\ (n\ x\ f)\ f)$$

3. Trois bandes, quatre états : s_0 initial et s_3 final. Dans l'état s_0 on recopie la bande 1 sur les bandes 2 et 3

$$M((\times,\times,\times),s_0) = ((\times,\times,\times),s_0,1)$$
$$M((|,b,b),s_0) = ((|,|,|),s_0,1)$$
$$M((b,b,b),s_0) = ((b,b,b),s_1,0)$$

Dans l'état s_1 on cherche le dernier bâton sur la bande 3 et on l'efface (s'il n'y a pas de tel bâton, on termine)

$$M((b,b,b),s_1) = ((b,b,b),s_1,-1)$$
$$M((b,|,b),s_1) = ((b,|,b),s_1,-1)$$
$$M((|,|,b),s_1) = ((|,|,b),s_1,-1)$$
$$M((|,|,|),s_1) = ((|,|,b),s_2,0)$$
$$M((\times,\times,\times),s_1) = ((\times,\times,\times),s_3,0)$$

Dans l'état s_2 on cherche le premier blanc sur la bande 2, on y écrit un bâton et on revient dans l'état s_1

$$M((b,|,b),s_2) = ((b,|,b),s_2,1)$$
$$M((|,|,b),s_2) = ((|,|,b),s_2,1)$$
$$M((b,b,b),s_2) = ((b,|,b),s_1,1)$$