

Logique Formelle & Programmation logique

Feuille de TD n° 1 : Syntaxe et Sémantique

Exercice 1 : Représentations syntaxiques

Représentez chacune des propositions ci-dessous (aussi appelées *formules*) comme des arbres, puis donnez la liste de ses sous-formules.

$$\begin{aligned} & \neg((p \wedge q) \Rightarrow p) \\ & p \Rightarrow (q \vee \neg q) \\ & (\neg p) \Rightarrow (q \vee (\neg(q \wedge q))) \\ & (\neg(p \wedge q)) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r)) \end{aligned}$$

Exercice 2 : Notation polonaise

La notation polonaise des propositions permet de représenter ces dernières comme des chaînes de caractères sans avoir besoin de parenthèses. La fonction f suivante transforme une formule A en sa notation polonaise, à l'aide d'un paramètre auxiliaire l qui est une chaîne de caractères :

$$\begin{aligned} f(p, l) & := p l \\ f(\neg A, l) & := \neg f(A, l) \\ f(\top, l) & := \top l \\ f(\perp, l) & := \perp l \\ f(A \wedge B, l) & := \wedge f(A, f(B, l)) \\ f(A \vee B, l) & := \vee f(A, f(B, l)) \\ f(A \Rightarrow B, l) & := \Rightarrow f(A, f(B, l)) \end{aligned}$$

1. Donnez la notation polonaise $f(A, \varepsilon)$ des formules A suivantes (ε est la chaîne de caractères vide) :

$$\begin{aligned} & p \vee ((q \wedge (\neg r)) \Rightarrow p) \\ & (p \Rightarrow (q \vee r)) \vee (\neg(r \Rightarrow w)) \end{aligned}$$

2. On associe un poids $K(\star)$ à chaque symbole \star de la manière suivante :

$$\begin{aligned} K(p) & := -1 \\ K(\perp) & := -1 \\ K(\top) & := -1 \\ K(\neg) & := 0 \\ K(\wedge) & := 1 \\ K(\vee) & := 1 \\ K(\Rightarrow) & := 1 \end{aligned}$$

Le poids $K(\star_1 \dots \star_n)$ d'une chaîne de symbole $\star_1 \dots \star_n$ est défini comme

$$K(\star_1) + \dots + K(\star_n)$$

Montrez que pour toute formule A et toute chaîne l ,

$$K(f(A, l)) = K(l) - 1$$

3. Déterminez si les chaînes de caractères suivantes sont des notations polonaises et, si oui, donnez les formules correspondantes :

$$\begin{aligned} & \neg \Rightarrow pqr \vee pq\neg r \\ & \Rightarrow \Rightarrow pq \Rightarrow \Rightarrow qr \Rightarrow \neg pr \\ & \vee \wedge \vee \neg p \neg qr \wedge \vee pr \vee \neg r \neg p \end{aligned}$$

Exercice 3 : Conséquence sémantique, validité

1. Montrez trois équivalences parmi celles ci-dessous :

$$\begin{aligned}\neg\neg A &\equiv A \\ \neg(A \wedge B) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \\ A \vee \neg A &\equiv \top \\ A \Rightarrow B &\equiv (\neg A) \vee B \\ A \vee (B \wedge C) &\equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ A \wedge B &\equiv B \wedge A \\ A \wedge (B \wedge C) &\equiv (A \wedge B) \wedge C\end{aligned}$$

2. Montrez que la formule de Peirce $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$ est valide.
3. Montrez que $A \models B$ si et seulement si $A \Rightarrow B$ est valide.