

# Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

`Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

**Cours 3 :**  
**Logique du 1er ordre**

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

Exemples d'univers de discours :

- les entiers
- les réels
- les ensembles

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

Exemples d'univers de discours :

- les entiers
- les réels
- les ensembles

Exemples de termes

$0, S(0), 3 + 4$

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

Exemples d'univers de discours :

- les entiers
- les réels
- les ensembles

Exemples de termes

$0, S(0), 3 + 4$

$3/4, \pi$



## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

Exemples d'univers de discours :

- les entiers
- les réels
- les ensembles

Exemples de termes

$0, S(0), 3 + 4$

$3/4, \pi$

$\emptyset, A \cup B$

## Pour faire rapide

---

On rajoute les quantificateurs  $\exists x, P$  et  $\forall x, P$

Oui mais ils quantifient sur quoi ?

On a besoin d'un **univers de discours**, dont les éléments sont décrits (dans la syntaxe) par des **termes**

Exemples d'univers de discours :

- les entiers
- les réels
- les ensembles

Exemples de termes

$0, S(0), 3 + 4$

$3/4, \pi$

$\emptyset, A \cup B$

## Syntaxe : termes

---

Formellement, on se donne une **signature**  $\Sigma$  **de termes** :  
ensemble de **constructeurs de termes** avec, pour chacun, une arité

## Syntaxe : termes

---

Formellement, on se donne une **signature**  $\Sigma$  **de termes** :  
ensemble de **constructeurs de termes** avec, pour chacun, une arité

Exemple :  $\Sigma = \{ "0" / 0, "S" / 1, "+" / 2 \}$

## Syntaxe : termes

---

Formellement, on se donne une **signature**  $\Sigma$  **de termes** :

ensemble de **constructeurs de termes** avec, pour chacun, une arité

Exemple :  $\Sigma = \{ \text{"0"} / 0, \text{"S"} / 1, \text{"+"} / 2 \}$

Comme annoncé, on se donne aussi des **variables de termes**  $x, y, z$

## Syntaxe : termes

---

Formellement, on se donne une **signature**  $\Sigma$  **de termes** :

ensemble de **constructeurs de termes** avec, pour chacun, une arité

Exemple :  $\Sigma = \{ \text{"0"} / 0, \text{"S"} / 1, \text{"+"} / 2 \}$

Comme annoncé, on se donne aussi des **variables de termes**  $x, y, z$

La syntaxe des termes est alors donnée par :

$$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_n) \quad \text{si } f/n \in \Sigma$$

## Syntaxe : termes

---

Formellement, on se donne une **signature**  $\Sigma$  **de termes** :

ensemble de **constructeurs de termes** avec, pour chacun, une arité

Exemple :  $\Sigma = \{ \text{"0"} / 0, \text{"S"} / 1, \text{"+"} / 2 \}$

Comme annoncé, on se donne aussi des **variables de termes**  $x, y, z$

La syntaxe des termes est alors donnée par :

$$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_n) \quad \text{si } f/n \in \Sigma$$

## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers



## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple :  $1 + 1 = 2$

$3 \leq 4$

$x \in y$

$x \subseteq y$

## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple :  $1 + 1 = 2$        $3 \leq 4$        $x \in y$        $x \subseteq y$

On se donne donc une **signature  $\Psi$  de propositions** :

ensemble de **propositions atomiques** avec, pour chacune, une arité

## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple :  $1 + 1 = 2$        $3 \leq 4$        $x \in y$        $x \subseteq y$

On se donne donc une **signature**  $\Psi$  **de propositions** :

ensemble de **propositions atomiques** avec, pour chacune, une arité

Exemple :  $\Psi = \{ \text{"="} / 2, \text{"\leq"} / 2, \text{"IsEven"} / 1 \}$

## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple :  $1 + 1 = 2$        $3 \leq 4$        $x \in y$        $x \subseteq y$

On se donne donc une **signature  $\Psi$  de propositions** :

ensemble de **propositions atomiques** avec, pour chacune, une arité

Exemple :  $\Psi = \{ \text{"="} / 2, \text{"\leq"} / 2, \text{"IsEven"} / 1 \}$

La syntaxe des propositions est alors donnée par :

$P ::= p(t_1, \dots, t_n) \mid \dots [\text{comme en logique prop.}] \dots \mid (\exists x, P) \mid (\forall x, P)$

si  $p/n \in \Psi$

## Syntaxe : propositions

---

Ensuite, on veut dire des choses sur ces objets de l'univers

Exemple :  $1 + 1 = 2$                        $3 \leq 4$                        $x \in y$                        $x \subseteq y$

On se donne donc une **signature  $\Psi$  de propositions** :

ensemble de **propositions atomiques** avec, pour chacune, une arité

Exemple :  $\Psi = \{ \text{"="} / 2, \text{"\leq"} / 2, \text{"IsEven"} / 1 \}$

La syntaxe des propositions est alors donnée par :

$P ::= p(t_1, \dots, t_n) \mid \dots [\text{comme en logique prop.}] \dots \mid (\exists x, P) \mid (\forall x, P)$

si  $p/n \in \Psi$

## Syntaxe : propositions

---

On bazarde les variables propositionnelles !

## Syntaxe : propositions

---

On bazarde les variables propositionnelles !

Elle servaient à ce que les propositions atomiques ne soient pas interprétées de manière constante (que chacune, selon l'interprétation, soit parfois vraie parfois fausse)

## Syntaxe : propositions

---

On bazarde les variables propositionnelles !

Elle servaient à ce que les propositions atomiques ne soient pas interprétées de manière constante (que chacune, selon l'interprétation, soit parfois vraie parfois fausse)

Ici, les termes donnés comme arguments des prop. atomiques vont créer cette variation.



## Syntaxe : propositions

---

On bazarde les variables propositionnelles !

Elle servaient à ce que les propositions atomiques ne soient pas interprétées de manière constante (que chacune, selon l'interprétation, soit parfois vraie parfois fausse)

Ici, les termes donnés comme arguments des prop. atomiques vont créer cette variation.

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

Plus complexe qu’il n’y paraît.

**Tâche 1** : définir quelles sont, dans  $P$  les variables muettes (=liées)

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

Plus complexe qu’il n’y paraît.

**Tâche 1** : définir quelles sont, dans  $P$  les variables muettes (=liées)

Celles qui n’y sont pas libres !

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

Plus complexe qu’il n’y paraît.

**Tâche 1** : définir quelles sont, dans  $P$  les variables muettes (=liées)

Celles qui n’y sont pas libres ! (on est bien avancé)

## Syntaxe : variables liées/muettes 1

---

Notion de variable muette en maths :

On “sait bien” que  $\forall x, P(x)$  c’est la même chose que  $\forall y, P(y)$

Intuition : le nom / la variable que j’utilise pour désigner une chose n’a pas d’importance

Plus complexe qu’il n’y paraît.

**Tâche 1** : définir quelles sont, dans  $P$  les variables muettes (=liées)

Celles qui n’y sont pas libres ! (on est bien avancé)

## Syntaxe : variables liées/muettes 2

---

Toute variable (de terme) apparaissant dans  $t$  est libre dans  $t$ , elles forment l'ensemble  $fv(t)$



## Syntaxe : variables liées/muettes 2

---

Toute variable (de terme) apparaissant dans  $t$  est libre dans  $t$ , elles forment l'ensemble  $fv(t)$

$fv$  est défini inductivement sur les propositions :

$$fv(p(t_1, \dots, t_n)) := fv(t_1) \cup \dots \cup fv(t_n)$$

$$fv(A \wedge B) := fv(A) \cup fv(B)$$

...

$$fv(\exists x, P) := fv(P) \setminus \{x\}$$

$$fv(\forall x, P) := fv(P) \setminus \{x\}$$

## Syntaxe : variables liées/muettes 2

---

Toute variable (de terme) apparaissant dans  $t$  est libre dans  $t$ , elles forment l'ensemble  $fv(t)$

$fv$  est défini inductivement sur les propositions :

$$fv(p(t_1, \dots, t_n)) := fv(t_1) \cup \dots \cup fv(t_n)$$

$$fv(A \wedge B) := fv(A) \cup fv(B)$$

...

$$fv(\exists x, P) := fv(P) \setminus \{x\}$$

$$fv(\forall x, P) := fv(P) \setminus \{x\}$$

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette appelé  $\alpha$ -conversion

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette  
appelé  $\alpha$ -conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur  $P$  (resp.  $t$ )

$(xy)P$  (resp.  $(xy)t$ ) :

partout où vous avez écrit  $x$  (lié ou libre), vous mettez  $y$ , et vice versa

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette  
appelé  $\alpha$ -conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur  $P$  (resp.  $t$ )

$(xy)P$  (resp.  $(xy)t$ ) :

partout où vous avez écrit  $x$  (lié ou libre), vous mettez  $y$ , et vice versa

$\exists x, P$  est identifié avec  $\exists y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

$\forall x, P$  est identifié avec  $\forall y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette  
appelé  $\alpha$ -conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur  $P$  (resp.  $t$ )

$(xy)P$  (resp.  $(xy)t$ ) :

partout où vous avez écrit  $x$  (lié ou libre), vous mettez  $y$ , et vice versa

$\exists x, P$  est identifié avec  $\exists y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

$\forall x, P$  est identifié avec  $\forall y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

Pourquoi “si  $y \notin fv(P)$ ” (i.e.  $y$  est une variable **fraiche**) ?

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette appelé  $\alpha$ -conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur  $P$  (resp.  $t$ )

$(xy)P$  (resp.  $(xy)t$ ) :

partout où vous avez écrit  $x$  (lié ou libre), vous mettez  $y$ , et vice versa

$\exists x, P$  est identifié avec  $\exists y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

$\forall x, P$  est identifié avec  $\forall y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

Pourquoi “si  $y \notin fv(P)$ ” (i.e.  $y$  est une variable **fraiche**) ?

$(y = 0) \wedge (\exists x, x = y)$  n'est pas la même chose que

$(y = 0) \wedge \exists y, y = x$

## Syntaxe : variables liées/muettes 3

---

**Tâche 2** : définir ce qu'est le renommage d'une variable muette appelé  $\alpha$ -conversion

On définit pour ça l'échange de 2 variables sur  $P$  (resp.  $t$ )

$(xy)P$  (resp.  $(xy)t$ ) :

partout où vous avez écrit  $x$  (lié ou libre), vous mettez  $y$ , et vice versa

$\exists x, P$  est identifié avec  $\exists y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

$\forall x, P$  est identifié avec  $\forall y, (xy)P$  si  $y \notin fv(P)$

Pourquoi “si  $y \notin fv(P)$ ” (i.e.  $y$  est une variable **fraiche**) ?

$(y = 0) \wedge (\exists x, x = y)$  n'est pas la même chose que

$(y = 0) \wedge \exists y, y = x$



## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

Que se passe-t-il si  $x = y$  ?

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

Que se passe-t-il si  $x = y$  ?

si  $y \in fv(t)$  ?

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

Que se passe-t-il si  $x = y$  ?

si  $y \in fv(t)$  ?

Moralité :

$\{t/x\} (\forall y, P) := \forall y, \{t/x\} P$       et       $\{t/x\} (\exists y, P) = \exists y, \{t/x\} P$

si  $x \neq y$  et  $y \notin fv(t)$



## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

Que se passe-t-il si  $x = y$  ?

si  $y \in fv(t)$  ?

Moralité :

$\{t/x\} (\forall y, P) := \forall y, \{t/x\} P$       et       $\{t/x\} (\exists y, P) = \exists y, \{t/x\} P$

si  $x \neq y$  et  $y \notin fv(t)$

sinon, renommer  $y$  en l'échangeant avec variable **fraiche**  $z$  :  $(yz)P$

## Syntaxe : variables substituées

---

**Tâche 3** : définir une notion de substitution (variable  $x$  par terme  $t$ )

sur les termes :  $\{t/x\} t'$

trivial.

sur les propositions :  $\{t/x\} P$

ATTENTION quand vous définissez  $\{t/x\} (\forall y, P)$  et  $\{t/x\} (\exists y, P)$  !!!

Que se passe-t-il si  $x = y$  ?

si  $y \in fv(t)$  ?

Moralité :

$\{t/x\} (\forall y, P) := \forall y, \{t/x\} P$       et       $\{t/x\} (\exists y, P) = \exists y, \{t/x\} P$

si  $x \neq y$  et  $y \notin fv(t)$

sinon, renommer  $y$  en l'échangeant avec variable **fraiche**  $z$  :  $(yz)P$

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir  
si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

**Sémantique d'un terme  $t$**  : par récurrence sur  $t$

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir  
si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

**Sémantique d'un terme  $t$**  : par récurrence sur  $t$

et si  $t$  est une variable  $x$  ?

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir  
si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

**Sémantique d'un terme  $t$**  : par récurrence sur  $t$

et si  $t$  est une variable  $x$  ?

Interprétation  $[t]_I$  d'un terme  $t$  est paramétrée par valuation qui interprète les variables vers  $\mathcal{U}$ ,



## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir  
si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

**Sémantique d'un terme  $t$**  : par récurrence sur  $t$

et si  $t$  est une variable  $x$  ?

Interprétation  $[t]_I$  d'un terme  $t$  est paramétrée par valuation qui interprète les variables vers  $\mathcal{U}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} [x]_I &:= I(x) \\ [f(t_1, \dots, t_n)]_I &:= \tilde{f}([t_1]_I, \dots, [t_n]_I) \end{aligned}$$

## Sémantique : termes

---

Il nous faut :

- un univers (sémantique)  $\mathcal{U}$  pour interpréter les termes
- une interprétation  $\tilde{f}$  de tous les constructeurs de termes  $f$ , à savoir  
si  $f$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{U}^n$  dans  $\mathcal{U}$

**Sémantique d'un terme  $t$**  : par récurrence sur  $t$

et si  $t$  est une variable  $x$  ?

Interprétation  $[t]_I$  d'un terme  $t$  est paramétrée par valuation qui interprète les variables vers  $\mathcal{U}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} [x]_I &:= I(x) \\ [f(t_1, \dots, t_n)]_I &:= \tilde{f}([t_1]_I, \dots, [t_n]_I) \end{aligned}$$

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

- une interprétation  $\tilde{p}$  de toutes les propositions atomiques  $p$ , à savoir  
si  $p$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{p}$  de  $\mathcal{U}^n$  vers  $\mathcal{B}$

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

- une interprétation  $\tilde{p}$  de toutes les propositions atomiques  $p$ , à savoir  
si  $p$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{p}$  de  $\mathcal{U}^n$  vers  $\mathcal{B}$

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

– une interprétation  $\tilde{p}$  de toutes les propositions atomiques  $p$ , à savoir

si  $p$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{p}$  de  $\mathcal{U}^n$  vers  $\mathcal{B}$

**Sémantique d'une proposition  $P$**  : par récurrence sur  $P$

dépend toujours de l'interprétation  $I$  des variable **libres** de  $P$

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

– une interprétation  $\tilde{p}$  de toutes les propositions atomiques  $p$ , à savoir

si  $p$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{p}$  de  $\mathcal{U}^n$  vers  $\mathcal{B}$

**Sémantique d'une proposition  $P$**  : par récurrence sur  $P$

dépend toujours de l'interprétation  $I$  des variable **libres** de  $P$

$$[p(t_1, \dots, t_n)]_I := \tilde{p}([t_1]_I, \dots, [t_n]_I)$$

$$[A \wedge B]_I := f_{\wedge}([A]_I, [B]_I)$$

...

$$[\forall x, P]_I := \min\{[P]_{I, x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\}$$

$$[\exists x, P]_I := \max\{[P]_{I, x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\}$$

## Sémantique : propositions

---

Il nous faut :

– une interprétation  $\tilde{p}$  de toutes les propositions atomiques  $p$ , à savoir

si  $p$  est d'arité  $n$ , une fonction  $\tilde{p}$  de  $\mathcal{U}^n$  vers  $\mathcal{B}$

**Sémantique d'une proposition  $P$**  : par récurrence sur  $P$

dépend toujours de l'interprétation  $I$  des variable **libres** de  $P$

$$[p(t_1, \dots, t_n)]_I := \tilde{p}([t_1]_I, \dots, [t_n]_I)$$

$$[A \wedge B]_I := f_{\wedge}([A]_I, [B]_I)$$

...

$$[\forall x, P]_I := \min\{[P]_{I, x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\}$$

$$[\exists x, P]_I := \max\{[P]_{I, x \mapsto u} \mid u \in \mathcal{U}\}$$



## Modèles & co.

---

Un modèle d'une proposition  $P$  est maintenant :

- un univers  $\mathcal{U}$  non-vidé
- une interprétation  $\tilde{f}$  pour chaque  $f \in \Sigma$  et  $\tilde{p}$  pour chaque  $p \in \Psi$
- une interprétation  $I(x) \in \mathcal{U}$  pour chaque variable  $x \in fv(P)$

tels que  $[P]_I = T$

## Modèles & co.

---

Un modèle d'une proposition  $P$  est maintenant :

- un univers  $\mathcal{U}$  non-vidé
- une interprétation  $\tilde{f}$  pour chaque  $f \in \Sigma$  et  $\tilde{p}$  pour chaque  $p \in \Psi$
- une interprétation  $I(x) \in \mathcal{U}$  pour chaque variable  $x \in fv(P)$

tels que  $[P]_I = T$

Dans le cas particulier où  $fv(P) = \emptyset$  (on dit que  $P$  est **clos**), cela ne dépend que de l'univers  $\mathcal{U}$  et de l'interprétation  $\tilde{\phantom{f}}$

## Modèles & co.

---

Un modèle d'une proposition  $P$  est maintenant :

- un univers  $\mathcal{U}$  non-vidé
- une interprétation  $\tilde{f}$  pour chaque  $f \in \Sigma$  et  $\tilde{p}$  pour chaque  $p \in \Psi$
- une interprétation  $I(x) \in \mathcal{U}$  pour chaque variable  $x \in fv(P)$

tels que  $[P]_I = T$

Dans le cas particulier où  $fv(P) = \emptyset$  (on dit que  $P$  est **clos**), cela ne dépend que de l'univers  $\mathcal{U}$  et de l'interprétation  $\tilde{\phantom{f}}$

### Définitions :

- $A$  est **satisfiable** s'il a un modèle
- $A$  est **valide**, noté  $\models A$ , si toutes les structures ci-dessus en sont des modèles
- $B$  est une **conséquence sémantique** de  $A$  (noté  $A \models B$ ) si tout modèle de  $A$  est aussi un modèle de  $B$
- $A$  et  $B$  sont **sémantiquement équivalents**, noté  $A \equiv B$ , si  $A \models B$  et  $B \models A$

**Théorème** :  $A$  est satisfiable (resp. valide) si et seulement si  $\neg A$  n'est pas valide (resp. satisfiable)

### Définitions :

- $A$  est **satisfiable** s'il a un modèle
- $A$  est **valide**, noté  $\models A$ , si toutes les structures ci-dessus en sont des modèles
- $B$  est une **conséquence sémantique** de  $A$  (noté  $A \models B$ ) si tout modèle de  $A$  est aussi un modèle de  $B$
- $A$  et  $B$  sont **sémantiquement équivalents**, noté  $A \equiv B$ , si  $A \models B$  et  $B \models A$

**Théorème** :  $A$  est satisfiable (resp. valide) si et seulement si  $\neg A$  n'est pas valide (resp. satisfiable)

## **Système de preuve ! G3 version logique du 1er ordre**

---

Même règles qu'en propositionnel, plus

## Système de preuve ! G3 version logique du 1er ordre

---

Même règles qu'en propositionnel, plus

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

## Système de preuve ! G3 version logique du 1er ordre

---

Même règles qu'en propositionnel, plus

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$



## Systeme de preuve ! G3 version logique du 1er ordre

---

Même r#egles qu'en propositionnel, plus

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

A nouveau : Dualit#e de De Morgan entre  $\forall$  et  $\exists$

## Systeme de preuve ! G3 version logique du 1er ordre

---

Même règles qu'en propositionnel, plus

$$\frac{\Gamma \vdash P, \Delta}{\Gamma \vdash (\forall x, P), \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

$$\frac{\Gamma, (\forall x, P), \{t/x\} P \vdash \Delta}{\Gamma, (\forall x, P) \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \{t/x\} P, (\exists x, P), \Delta}{\Gamma \vdash (\exists x, P), \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash \Delta}{\Gamma, (\exists x, P) \vdash \Delta} \quad x \notin fv(\Gamma, \Delta)$$

A nouveau : Dualité de De Morgan entre  $\forall$  et  $\exists$

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut :

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut : **difficile pour ce cours**

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut : **difficile pour ce cours**  
Il faut construire un modèle, avec un  $\mathcal{U}$  et un  $\sim$ !!!

## G3 : Correction et complétude

---

### ***Théorème***

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut : **difficile pour ce cours**  
Il faut construire un modèle, avec un  $\mathcal{U}$  et un  $\sim$ !!!  
A partir de quoi ?



## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut : **difficile pour ce cours**  
Il faut construire un modèle, avec un  $\mathcal{U}$  et un  $\sim$ !!!  
A partir de quoi ? la syntaxe elle-même...

## G3 : Correction et complétude

---

### *Théorème*

$$A_1, \dots, A_n \vdash_{G3} B_1, \dots, B_m$$

si et seulement si

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B_1 \vee \dots \vee B_m$$

Démonstration :

- du haut vers le bas : comme d'hab. par récurrence sur la hauteur de la dérivation
- du bas vers le haut : **difficile pour ce cours**  
Il faut construire un modèle, avec un  $\mathcal{U}$  et un  $\sim$ !!!  
A partir de quoi ? la syntaxe elle-même...

**Questions?**