

Logique formelle & Programmation logique

$$\exists \Rightarrow \forall$$

Dr. Stéphane Lengrand,

`Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

Cours 0 :
Motivation, Introduction

Introduction au cours

Présentations

Pourquoi ce cours vous intéresse :

- Vous vous destinés à êtres ingénieurs...
 - ...en Info, Electronique et Automatique
- Nécessairement, vous allez faire des erreurs
 - parce que vous êtes humains !
 - parce que d'autres en ont fait avant vous !
- Certains bugs coûtent plus que d'autres
 - Crash d'Ariane 5, 04/06/1996 : 500 millions d'euros
 - Bug du Pentium P5, 1995 : 475 millions de dollars

Oui mais pourquoi la logique ?

- Développement personnel : Ingénieurs de qualité \Leftarrow Rigueur \Leftarrow Logique
- Science pour la fiabilité des systèmes :
Logique a produit des **outils** pour l'assurance de la qualité

Méthodes formelles

...à base de mathématiques

- Intelligence Artificielle

Vous vous dites : est-ce que ça en vaut les efforts ?

Développement personnel : Oui, pour vous

Intelligence artificielle : Oui, la logique en est la base

Méthodes formelles :

Ca dépend, elles sont coûteuses, mais nécessaires dans plusieurs cas

– quand des vies humaines sont en jeu

(cf systèmes embarqués, pilotes automatiques, ligne 14-Meteor)

– quand beaucoup d'argent est en jeu

(cf Ariane, transactions financières)

– quand les informations sont confidentielles

(eg correction de protocole cryptographique)

Sur ce cours

En 3ème année : vous devez être autonomes

~~APPRENDRE~~

COMPRENDRE

Contrôle : Droit aux documents. Pas aux livres.

Pas plus facile, prend du temps, de l'écoute

Venir me voir = votre responsabilité

M'interrompre = votre responsabilité

Contact : `Stephane.Lengrand@Polytechnique.edu`

Page web :

`http://www.lix.polytechnique.fr/~lengrand/`

Sur ce cours, suite

Transparents disponibles en pdf sur mon site web

Ne contient pas toutes les infos (par ex : les démonstrations)

⇒ en TDs ou en livres :

- *Logique pour l'informatique : introduction à la déduction automatique*,
Serenella Cerrito (Ed. Vuibert) (23,75 eur -Amazon)
- *Logique mathématique, tome 1 & 2*,
René Cori et Daniel Lascar (Ed. Dunod) (38,95 eur)
- *Introduction à la logique : Théorie de la démonstration*,
Karim Nour, René David et Christophe Raffalli (Ed. Dunod) (30,88 eur)
- *Proof Theory and Automated Deduction*, Jean Goubault-Larrecq et Ian
Mackie (Kluwer Academic Publisher) (48,57 eur)
- ce qu'il y a de disponible dans la bibliothèque locale

La logique, ça vient d'où ?

C'est vieux (Aristote, Socrate, ...).

Vérité : confrontation avec la réalité.

Depuis...

- diversification des disciplines mathématiques
- éloignement de plus en plus important d'une réalité tangible

XIX^{ème} siècle, crise logique. Les mathématiques : quoi, comment ?

- quelle est la théorie universelle qui unifie les mathématiques ?
- comment raisonne-t-on pour tirer des conclusions de cette théorie ?

- Axiomes
- Démonstration

Grossièrement, quelques noms et contributions

Boole (1815-1864) : algèbres de Boole, booléens, . . . ça vous dit qq chose ?

Frege (1848-1925) :

bases -imparfaites- de la théorie des ensembles, formalismes logiques, . . .

Hilbert (1862-1943) : 23 problèmes ouverts, meta-mathématiques, . . .

Zermelo (1871-1953) : théorie des ensembles moderne, avec Fraenkel

Russell (1872-1970) :

célèbre pour son paradoxe trouvé chez Frege, Principia Mathematica

Brouwer (1881-1966) : constructivisme

Goedel (1906-1978) : théorèmes d'incomplétude

Church (1903-1995) : fonctions et calcul, théorèmes d'indécidabilité. . .

Gentzen (1909-1945) : théorèmes de cohérence et formalismes logiques

Méta-mathématiques

Les mathématiques =

outils et méthodes pour étudier rigoureusement des objets

Et si l'objet d'étude était le fonctionnement des maths elles-mêmes ???

⇒ **Meta-mathématiques**

Grande avancée : **vérité** ⇒ **prouvabilité**

Une proposition P est-elle vraie ?



Une proposition P est-elle prouvable ?

Questions meta-mathématiques

– Existe-t-il un langage adéquat pour parler de toutes les mathématiques ?

OUI : langage des prédicats = langage du 1er ordre

– Qu'est-ce qu'une démonstration / preuve / deduction ?

Toujours pas d'accord. Raisonnement par l'absurde ? ou pas ?

Brouwer, Heyting, Kolmogorov, ... le refusent

ensuite, questions de présentations (calcul des séquents, ...)

– Existe-t-il une collection d'axiomes (si possible la plus petite) à partir desquelles se déduisent toutes les maths ?

Théorie des ensembles, Zermelo-Fraenkel : 9 "axiomes" (ou schémas)

Frege : pour chaque propriété P , autorise la construction $\{x \mid P(x)\}$

Paradoxe :

Soit $F = \{x \mid x \notin x\}$. Est-ce que $F \in F$ ou est-ce que $F \notin F$?...

Questions meta-mathématiques, suite

- Etant donné une proposition P , existe-t-il toujours soit une preuve de P soit une preuve de $\neg P$? (in)complétude1

NON (Goedel)

- Les mathématiques peuvent-elles démontrer qu'elles ne se contredisent pas ? (in)complétude2

NON (Goedel)

- Existe-il un algorithme qui réponde OUI s'il existe une preuve de P , qui réponde NON sinon ? (in)décidabilité

NON (Church, Turing)

Ces trois réponses datent des années 30.

Questions?